

Gödel's Incompleteness Theorems.

Chapter III §3, §4

Ronald Klaus

12. Juni 2007

§3 Arithmetization of the Syntax of P.E.

Ziel

Erinnerung

Funktionen und Bedingungen

§4 Gödel's Incompleteness Theorem of P.E.

Beweis

Abschließende Bemerkung

Warum eigentlich das ganze?

Ziel

- wir geben 8 Funktionen und 17 Bedingungen an

Warum eigentlich das ganze?

Ziel

- wir geben 8 Funktionen und 17 Bedingungen an

Warum eigentlich das ganze?

Ziel

- wir geben 8 Funktionen und 17 Bedingungen an
- wir zeigen, dass diese „Arithmetisch“ sind

Warum eigentlich das ganze?

Ziel

- wir geben 8 Funktionen und 17 Bedingungen an
- wir zeigen, dass diese „Arithmetisch“ sind

Warum eigentlich das ganze?

Ziel

- wir geben 8 Funktionen und 17 Bedingungen an
- wir zeigen, dass diese „Arithmetisch“ sind
- wir zeigen, dass P.E. unvollständig ist

Erinnerung

- E_x - Ausdruck dessen Gödelnummer x ist

Erinnerung

- E_x - Ausdruck dessen Gödelnummer x ist
- $(E_{x_1}, \dots, E_{x_n})$ - Sequenz mit der Sequenznummer der Sequenz (x_1, \dots, x_n)

Erinnerung

- E_x - Ausdruck dessen Gödelnummer x ist
- $(E_{x_1}, \dots, E_{x_n})$ - Sequenz mit der Sequenznummer der Sequenz (x_1, \dots, x_n)
- zur Unterscheidung der einzelnen Ausdrücke nutzen wir das Zeichen $\#$, also $\#E_{x_1}\#E_{x_2}\#\dots\#E_{x_n}\#$

Erinnerung

- E_x - Ausdruck dessen Gödelnummer x ist
- $(E_{x_1}, \dots, E_{x_n})$ - Sequenz mit der Sequenznummer der Sequenz (x_1, \dots, x_n)
- zur Unterscheidung der einzelnen Ausdrücke nutzen wir das Zeichen $\#$, also $\#E_{x_1}\#E_{x_2}\#\dots\#E_{x_n}\#$

Funktionen

Für jede Nummer x, y beziehen wir die Gödelnummern der Ausdrücke $(E_x \supset E_y)$, $\sim E_x$, $(E_x + E_y)$, $(E_x \cdot E_y)$, $(E_x \mathbf{E} E_y)$, E_x' , $E_x = E_y$ und $E_x \leq E_y$ jeweils auf $x \text{ imp } y$, $\text{neg}(x)$, $x \text{ pl } y$, $x \text{ tim } y$, $x \text{ exp } y$, $s(x)$, $x \text{ id } y$ und $x \text{ le } y$.

Funktionen

Für jede Nummer x, y beziehen wir die Gödelnummern der Ausdrücke $(E_x \supset E_y)$, $\sim E_x$, $(E_x + E_y)$, $(E_x \cdot E_y)$, $(E_x \mathbf{E} E_y)$, E_x' , $E_x = E_y$ und $E_x \leq E_y$ jeweils auf $x \text{ imp } y$, $\text{neg}(x)$, $x \text{ pl } y$, $x \text{ tim } y$, $x \text{ exp } y$, $s(x)$, $x \text{ id } y$ und $x \text{ le } y$.

Diese 8 Funktionen sind „Arithmetisch“.

Funktionen

Für jede Nummer x, y beziehen wir die Gödelnummern der Ausdrücke $(E_x \supset E_y)$, $\sim E_x$, $(E_x + E_y)$, $(E_x \cdot E_y)$, $(E_x \equiv E_y)$, E_x' , $E_x = E_y$ und $E_x \leq E_y$ jeweils auf $x \text{ imp } y$, $\text{neg}(x)$, $x \text{ pl } y$, $x \text{ tim } y$, $x \text{ exp } y$, $s(x)$, $x \text{ id } y$ und $x \text{ le } y$.

Diese 8 Funktionen sind „Arithmetisch“.

Beispiel

$$x \text{ imp } y = 2x8y3$$

Bedingungen (1 - 3)

1. $Sb(x) - E_x$ ist eine Zeichenkette von Hochkommata

Bedingungen (1 - 3)

1. $Sb(x) - E_x$ ist eine Zeichenkette von Hochkommata
 $(\forall y \leq x)(yPx \supset \exists Py)$

Bedingungen (1 - 3)

1. $Sb(x) - E_x$ ist eine Zeichenkette von Hochkommata
 $(\forall y \leq x)(yPx \supset \exists Py)$
2. $Var(x) - E_x$ ist eine Variable

Bedingungen (1 - 3)

1. $Sb(x) - E_x$ ist eine Zeichenkette von Hochkommata
 $(\forall y \leq x)(yPx \supset 5Py)$
2. $Var(x) - E_x$ ist eine Variable
 $(\exists y \leq x)(Sb(y) \wedge x = 26y3)$

Bedingungen (1 - 3)

1. $Sb(x) - E_x$ ist eine Zeichenkette von Hochkommata
 $(\forall y \leq x)(yPx \supset 5Py)$
2. $Var(x) - E_x$ ist eine Variable
 $(\exists y \leq x)(Sb(y) \wedge x = 26y3)$
3. $Num(x) - E_x$ ist eine Nummer

Bedingungen (1 - 3)

1. $Sb(x) - E_x$ ist eine Zeichenkette von Hochkommata
 $(\forall y \leq x)(yPx \supset 5Py)$
2. $Var(x) - E_x$ ist eine Variable
 $(\exists y \leq x)(Sb(y) \wedge x = 26y3)$
3. $Num(x) - E_x$ ist eine Nummer
 $Pow(x)$

Bedingungen (4 - 6)

4. $R_1(x, y, z)$ - die Relation $R_t(E_x, E_y, E_z)$ enthält folgendes

Bedingungen (4 - 6)

4. $R_1(x, y, z)$ - die Relation $R_t(E_x, E_y, E_z)$ enthält folgendes
 $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = x \text{ exp } y \vee z = s(x)$

Bedingungen (4 - 6)

4. $R_1(x, y, z)$ - die Relation $R_t(E_x, E_y, E_z)$ enthält folgendes
 $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = x \text{ exp } y \vee z = s(x)$
5. $\text{Seq}_t(x)$ - E_x ist Bildungssequenz für Terme

Bedingungen (4 - 6)

4. $R_1(x, y, z)$ - die Relation $R_t(E_x, E_y, E_z)$ enthält folgendes
 $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = x \text{ exp } y \vee z = s(x)$
5. $\text{Seq}_t(x)$ - E_x ist Bildungssequenz für Terme
 $\text{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(\text{Var}(y) \vee \text{Num}(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_1(z, w, y))$

Bedingungen (4 - 6)

4. $R_1(x, y, z)$ - die Relation $R_t(E_x, E_y, E_z)$ enthält folgendes
 $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = x \text{ exp } y \vee z = s(x)$
5. $\text{Seq}_t(x)$ - E_x ist Bildungssequenz für Terme
 $\text{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(\text{Var}(y) \vee \text{Num}(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_1(z, w, y))$
6. $\text{tm}(x)$ - E_x ist ein Term

Bedingungen (4 - 6)

4. $R_1(x, y, z)$ - die Relation $R_t(E_x, E_y, E_z)$ enthält folgendes
 $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = x \text{ exp } y \vee z = s(x)$
5. $\text{Seq}_t(x)$ - E_x ist Bildungssequenz für Terme
 $\text{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(\text{Var}(y) \vee \text{Num}(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_1(z, w, y))$
6. $\text{tm}(x)$ - E_x ist ein Term
 $\exists y(\text{Sept}(y) \wedge x \in y)$

Bedingungen (7 - 9)

7. $f_0(x) - E_x$ ist ein Term

Bedingungen (7 - 9)

7. $f_0(x) - E_x$ ist ein Term

$$(\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\text{tm}(y) \wedge \text{tm}(z) \wedge (x = y \text{ id } z \wedge x = y \text{ le } z))$$

Bedingungen (7 - 9)

7. $f_0(x) - E_x$ ist ein Term

$$(\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\text{tm}(y) \wedge \text{tm}(z) \wedge (x = y \text{ id } z \wedge x = y \text{ le } z))$$

8. $\text{Gen}(x, y) - E_y = \forall w E_x$ für einige Variablen w

Bedingungen (7 - 9)

7. $f_0(x) - E_x$ ist ein Term

$$(\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\text{tm}(y) \wedge \text{tm}(z) \wedge (x = y \text{ id } z \wedge x = y \text{ le } z))$$

8. $\text{Gen}(x, y) - E_y = \forall w E_x$ für einige Variablen w

$$(\exists z \leq y)(\text{Var}(z) \wedge y = 9zx)$$

Bedingungen (7 - 9)

7. $f_0(x) - E_x$ ist ein Term

$$(\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\text{tm}(y) \wedge \text{tm}(z) \wedge (x = y \text{ id } z \wedge x = y \text{ le } z))$$

8. $\text{Gen}(x, y) - E_y = \forall w E_x$ für einige Variablen w

$$(\exists z \leq y)(\text{Var}(z) \wedge y = 9zx)$$

9. $R_2(x, y, z) - E_z$ - die Relation $R_f(E_x, E_y, E_z)$ enthält folgendes

Bedingungen (7 - 9)

7. $f_0(x) - E_x$ ist ein Term

$$(\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\text{tm}(y) \wedge \text{tm}(z) \wedge (x = y \text{ id } z \wedge x = y \text{ le } z))$$

8. $\text{Gen}(x, y) - E_y = \forall w E_x$ für einige Variablen w

$$(\exists z \leq y)(\text{Var}(z) \wedge y = 9zx)$$

9. $R_2(x, y, z)$ - die Relation $R_f(E_x, E_y, E_z)$ enthält folgendes
 $z = x \text{ imp } y \vee z = \text{neg}(x) \vee \text{Gen}(x, z)$

Bedingungen (10 - 12)

10. $\text{Seqf}(x) - E_x$ ist Bildungssequenz für Formeln

Bedingungen (10 - 12)

10. $\text{Seqf}(x) - E_x$ ist Bildungssequenz für Formeln

$$\text{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(f_0(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_2(z, w, y))$$

Bedingungen (10 - 12)

10. $\text{Seqf}(x) - E_x$ ist Bildungssequenz für Formeln

$$\text{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(f_0(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_2(z, w, y))$$

11. $\text{fm}(x) - E_x$ ist eine Formel

Bedingungen (10 - 12)

10. $\text{Seqf}(x) - E_x$ ist Bildungssequenz für Formeln

$$\text{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(f_0(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_2(z, w, y))$$

11. $\text{fm}(x) - E_x$ ist eine Formel

$$\exists y(\text{Sepf}(y) \wedge x \in y)$$

Bedingungen (10 - 12)

10. $\text{Seqf}(x) - E_x$ ist Bildungssequenz für Formeln

$$\text{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(f_0(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_2(z, w, y))$$

11. $\text{fm}(x) - E_x$ ist eine Formel

$$\exists y(\text{Sepf}(y) \wedge x \in y)$$

12. $A(x) - E_x$ ist ein Axiom aus P.E.

Bedingungen (10 - 12)

10. $\text{Seqf}(x) - E_x$ ist Bildungssequenz für Formeln

$$\text{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(f_0(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_2(z, w, y))$$

11. $\text{fm}(x) - E_x$ ist eine Formel

$$\exists y(\text{Sepf}(y) \wedge x \in y)$$

12. $A(x) - E_x$ ist ein Axiom aus P.E.

siehe Tafel

Bedingungen (13 - 15)

13. $M.P.(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1

Bedingungen (13 - 15)

13. M.P.(x, y, z) - E_z ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1
 $y = x \text{ imp } z$

Bedingungen (13 - 15)

13. $M.P.(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1
 $y = x \text{ imp } z$
14. $Der(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1,
oder ist ableitbar aus E_x nach Regel 2

Bedingungen (13 - 15)

13. $M.P.(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1
 $y = x \text{ imp } z$
14. $Der(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1,
oder ist ableitbar aus E_x nach Regel 2
 $M.P.(x, y, z) \vee Gen(x, z)$

Bedingungen (13 - 15)

13. $M.P.(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1
 $y = x \text{ imp } z$
14. $Der(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1,
oder ist ableitbar aus E_x nach Regel 2
 $M.P.(x, y, z) \vee Gen(x, z)$
15. $Pf(x) - E_x$ ist ein Beweis in P.E.

Bedingungen (13 - 15)

13. $M.P.(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1
 $y = x \text{ imp } z$

14. $Der(x, y, z) - E_z$ ist ableitbar aus E_x und E_y nach Regel 1,
oder ist ableitbar aus E_x nach Regel 2

$M.P.(x, y, z) \vee Gen(x, z)$

15. $Pf(x) - E_x$ ist ein Beweis in P.E.

$Seq(x) \wedge (\forall y \in x)(A(y) \vee (\exists z, w \underset{x}{\prec} y)Der(z, w, y))$

Bedingungen (16 - 17)

16. $P_E(x) - E_x$ ist beweisbar in P.E

Bedingungen (16 - 17)

16. $P_E(x) - E_x$ ist beweisbar in P.E

$$\exists y(Pf(y) \wedge x \in y)$$

Bedingungen (16 - 17)

16. $P_E(x) - E_x$ ist beweisbar in P.E

$$\exists y(Pf(y) \wedge x \in y)$$

17. $R_E(x) - E_x$ ist widerlegbar in P.E.

Bedingungen (16 - 17)

16. $P_E(x) - E_x$ ist beweisbar in P.E

$$\exists y(\text{Pf}(y) \wedge x \in y)$$

17. $R_E(x) - E_x$ ist widerlegbar in P.E.

$$P_E(\text{neg}(x))$$

Bedingungen (16 - 17)

16. $P_E(x) - E_x$ ist beweisbar in P.E

$$\exists y(Pf(y) \wedge x \in y)$$

17. $R_E(x) - E_x$ ist widerlegbar in P.E.

$$P_E(\text{neg}(x))$$

Satz

Die Bedingungen 1 - 17 sind „Arithmetisch“.

Theorem

Das Axiomensystem P.E. ist unvollständig.

§4 Gödel's Incompleteness Theorem of P.E.

Beweis.

- P_E - Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln



Beweis.

- P_E - Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln
- R_E - Menge der Gödelnummern der widerlegbaren Formeln



Beweis.

- P_E - Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln
- R_E - Menge der Gödelnummern der widerlegbaren Formeln
- $P(v_1), R(v_1)$ - Formeln die diese in \mathcal{L}_E ausdrücken



§4 Gödel's Incompleteness Theorem of P.E.

Beweis.

- P_E - Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln
- R_E - Menge der Gödelnummern der widerlegbaren Formeln
- $P(v_1), R(v_1)$ - Formeln die diese in \mathcal{L}_E ausdrücken
- $\sim P(v_1)$ - Komplement \tilde{P}_E von P_E



§4 Gödel's Incompleteness Theorem of P.E.

Beweis.

- P_E - Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln
- R_E - Menge der Gödelnummern der widerlegbaren Formeln
- $P(v_1), R(v_1)$ - Formeln die diese in \mathcal{L}_E ausdrücken
- $\sim P(v_1)$ - Komplement \tilde{P}_E von P_E
- $H(v_1)$ - Formel die die Menge \tilde{P}_E^* ausdrückt



§4 Gödel's Incompleteness Theorem of P.E.

Beweis.

- P_E - Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln
- R_E - Menge der Gödelnummern der widerlegbaren Formeln
- $P(v_1), R(v_1)$ - Formeln die diese in \mathcal{L}_E ausdrücken
- $\sim P(v_1)$ - Komplement \tilde{P}_E von P_E
- $H(v_1)$ - Formel die die Menge \tilde{P}_E^* ausdrückt
- $H[\bar{h}]$ - Gödelsatz der Menge \tilde{P}_E



§4 Gödel's Incompleteness Theorem of P.E.

Beweis.

- P_E - Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln
- R_E - Menge der Gödelnummern der widerlegbaren Formeln
- $P(v_1), R(v_1)$ - Formeln die diese in \mathcal{L}_E ausdrücken
- $\sim P(v_1)$ - Komplement \tilde{P}_E von P_E
- $H(v_1)$ - Formel die die Menge \tilde{P}_E^* ausdrückt
- $H[\bar{h}]$ - Gödelsatz der Menge \tilde{P}_E
- da P.E. korrekt ist, ist $H[\bar{h}]$ wahr aber nicht beweisbar



§4 Gödel's Incompleteness Theorem of P.E.

Beweis.

- P_E - Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln
- R_E - Menge der Gödelnummern der widerlegbaren Formeln
- $P(v_1), R(v_1)$ - Formeln die diese in \mathcal{L}_E ausdrücken
- $\sim P(v_1)$ - Komplement \tilde{P}_E von P_E
- $H(v_1)$ - Formel die die Menge \tilde{P}_E^* ausdrückt
- $H[\bar{h}]$ - Gödelsatz der Menge \tilde{P}_E
- da P.E. korrekt ist, ist $H[\bar{h}]$ wahr aber nicht beweisbar
- Alternativbeweis über R_E möglich



Sehr einfach wegen:

- Nutzen der Korrektheit

Sehr einfach wegen:

- Nutzen der Korrektheit
- Betrachten der Exponentiation

Sehr einfach wegen:

- Nutzen der Korrektheit
- Betrachten der Exponentiation
- Vermeiden der Substitution

Auf Wiedersehen!

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit und ein schönes Wochenende.