

# Repräsentationsfunktion und Tarski-Theorem

Frank Fuhlbrück

8.6.2007

# Inhalt

Repräsentationsfunktion von  $\mathcal{L}_E$

Tarski-Theorem

# Ziel: Diagonalisierung

## Gödels Weg: Substitution

- ▶ u.a. Umbenennung von Variablen nötig
- ▶ Folge: Veränderung der Gödelnummer nur umständlich arithmetisch beschreibbar.

# Ziel: Diagonalisierung

## Gödels Weg: Substitution

- ▶ u.a. Umbenennung von Variablen nötig
- ▶ Folge: Veränderung der Gödelnummer nur umständlich arithmetisch beschreibbar.

## Tarskis Weg: Formeln mit einziger freier Variable $v_1$

- ▶ Quantifizierung von  $v_1$  statt Substitution
- ▶ deutlich einfacher

## Konstruktion von $E[\bar{n}]$

Für jeden Ausdruck  $E$  und jede natürliche Zahl  $n$  sei:

$$E[\bar{n}] := \forall v_1 (v_1 = \bar{n} \supset E)$$

# Konstruktion von $E[\bar{n}]$

Für jeden Ausdruck  $E$  und jede natürliche Zahl  $n$  sei:

$$E[\bar{n}] := \forall v_1 (v_1 = \bar{n} \supset E)$$

- ▶  $E[\bar{n}]$  ist für alle Ausdrücke definiert!
- ▶ Für Formeln  $F$  ist  $F[\bar{n}]$  wieder eine Formel
- ▶ Für Formeln  $F(v_1)$  mit der einzigen freien Variable  $v_1$  ist  $F[\bar{n}]$  äquivalent zu  $F(\bar{n})$ .
  
- ▶  $E[\bar{n}]$  erfüllt die Rolle von  $E(n)$  aus Kapitel 1.

# Die Repräsentationsfunktion $r$

Zur Erinnerung:

Der Ausdruck  $E_x$  ist der Ausdruck mit der Gödelnummer  $x$ .

# Die Repräsentationsfunktion $r$

Sei  $r : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  definiert durch:

$$r(x, y) = z \leftrightarrow E_z = E_x[\bar{y}]$$

- ▶ d.h.  $r(x, y)$  ist Gödelnummer des Ausdrucks  $E_x[\bar{y}]$
- ▶ (informell wird  $y$  in den Ausdruck mit der Gödelnummer  $x$  eingesetzt)

## Beweis: $r$ ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen  $x, y, z$  mit  $r(x, y) = z$  :

- ▶ Der Ausdruck  $\forall v_1 (v_1 = \dots)$  hat die Gödelnummer:  $(965265\eta)_{13}$

# Beweis: $r$ ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen  $x, y, z$  mit  $r(x, y) = z$  :

- ▶ Der Ausdruck  $\forall v_1 (v_1 = \dots)$  hat die Gödelnummer:  $(965265\eta)_{13}$
- ▶ Für alle natürlichen  $y$  ist  $\bar{y}$  der Ausdruck  $0^m$ , wobei  $m$  der Ausdruck aus  $y$  mal dem Symbol  $'$  ist  
Die Gödelnummer von  $\bar{y}$  ist daher 1 gefolgt von  $y$  mal 0 (zur Basis 13), also  $(10_{13})^y$

# Beweis: $r$ ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen  $x, y, z$  mit  $r(x, y) = z$  :

- ▶ Der Ausdruck  $\forall v_1 (v_1 = \dots)$  hat die Gödelnummer:  $(965265\eta)_{13}$
- ▶ Für alle natürlichen  $y$  ist  $\bar{y}$  der Ausdruck  $0^m$ , wobei  $m$  der Ausdruck aus  $y$  mal dem Symbol  $'$  ist  
Die Gödelnummer von  $\bar{y}$  ist daher 1 gefolgt von  $y$  mal 0 (zur Basis 13), also  $(10_{13})^y$
- ▶ Der Ausdruck  $\supset$  hat die Gödelnummer 8

# Beweis: $r$ ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen  $x, y, z$  mit  $r(x, y) = z$  :

- ▶ Der Ausdruck  $\forall v_1 (v_1 = \dots)$  hat die Gödelnummer:  $(965265\eta)_{13}$
- ▶ Für alle natürlichen  $y$  ist  $\bar{y}$  der Ausdruck  $0^m$ , wobei  $m$  der Ausdruck aus  $y$  mal dem Symbol  $'$  ist  
Die Gödelnummer von  $\bar{y}$  ist daher 1 gefolgt von  $y$  mal 0 (zur Basis 13), also  $(10_{13})^y$
- ▶ Der Ausdruck  $\supset$  hat die Gödelnummer 8
- ▶  $E_x$  besitzt nach Def. die Nummer  $x$

# Beweis: $r$ ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen  $x, y, z$  mit  $r(x, y) = z$  :

- ▶ Der Ausdruck  $\forall v_1 (v_1 = \dots)$  hat die Gödelnummer:  $(965265\eta)_{13}$
- ▶ Für alle natürlichen  $y$  ist  $\bar{y}$  der Ausdruck  $0^m$ , wobei  $m$  der Ausdruck aus  $y$  mal dem Symbol  $'$  ist  
Die Gödelnummer von  $\bar{y}$  ist daher 1 gefolgt von  $y$  mal 0 (zur Basis 13), also  $(10_{13})^y$
- ▶ Der Ausdruck  $\supset$  hat die Gödelnummer 8
- ▶  $E_x$  besitzt nach Def. die Nummer  $x$
- ▶  $)$  hat die Gödelnummer 3

# Beweis: $r$ ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen  $x, y, z$  mit  $r(x, y) = z$  :

- ▶ Der Ausdruck  $\forall v_1 (v_1 = \dots)$  hat die Gödelnummer:  $(965265\eta)_{13}$
- ▶ Für alle natürlichen  $y$  ist  $\bar{y}$  der Ausdruck  $0^m$ , wobei  $m$  der Ausdruck aus  $y$  mal dem Symbol  $'$  ist  
Die Gödelnummer von  $\bar{y}$  ist daher 1 gefolgt von  $y$  mal 0 (zur Basis 13), also  $(10_{13})^y$
- ▶ Der Ausdruck  $\supset$  hat die Gödelnummer 8
- ▶  $E_x$  besitzt nach Def. die Nummer  $x$
- ▶  $)$  hat die Gödelnummer 3



# Diagonalisierung

Für alle natürlichen  $x$  sei  $d(x) = r(x, x)$

# Diagonalisierung

Für alle natürlichen  $x$  sei  $d(x) = r(x, x)$

- ▶  $d$  heißt *Diagonal* funktion
- ▶  $d(x) = z$  ist Aritmetisch, da  $r(x, x) = z$  Arithmetisch ist
- ▶  $d(x)$  ist die Gödelnummer von  $E_x[\bar{x}]$

Für alle  $A$ ,  $A \subseteq \mathbb{N}$  sei  $A^*$ :  $d(n) \in A \leftrightarrow a \in A^*$

- ▶ d.h.  $A^* = d^{-1}(A)$

## Lemma1:

Ist  $A$  Arithmetisch, so ist es auch  $A^*$

## Lemma1:

Ist  $A$  Arithmetisch, so ist es auch  $A^*$

Beweis:

- ▶ Da  $d(x) = y$  Arithmetisch ist, ex. ein Ausdruck  $D(v_1, v_2)$  mit den einzigen freien Variablen  $v_1$  und  $v_2$   
es gilt:  $D(\bar{x}, \bar{y})$  ist wahr  $\leftrightarrow d(x) = y$

## Lemma1:

Ist  $A$  Arithmetisch, so ist es auch  $A^*$

Beweis:

- ▶ Da  $d(x) = y$  Arithmetisch ist, ex. ein Ausdruck  $D(v_1, v_2)$  mit den einzigen freien Variablen  $v_1$  und  $v_2$   
es gilt:  $D(\bar{x}, \bar{y})$  ist wahr  $\leftrightarrow d(x) = y$
- ▶ Ist  $A$  Arithmetisch, so ex. ein Ausdruck  $F(v_1)$  mit  $v_1$  als einziger freier Variable.  
es gilt:  $F(\bar{n})$  ist wahr  $\leftrightarrow n \in A$

## Lemma1:

Ist  $A$  Arithmetisch, so ist es auch  $A^*$

Beweis:

- ▶ Da  $d(x) = y$  Arithmetisch ist, ex. ein Ausdruck  $D(v_1, v_2)$  mit den einzigen freien Variablen  $v_1$  und  $v_2$   
es gilt:  $D(\bar{x}, \bar{y})$  ist wahr  $\leftrightarrow d(x) = y$
- ▶ Ist  $A$  Arithmetisch, so ex. ein Ausdruck  $F(v_1)$  mit  $v_1$  als einziger freier Variable.  
es gilt:  $F(\bar{n})$  ist wahr  $\leftrightarrow n \in A$
- ▶ Betrachtet man die substituierte Formel  $F(v_2)$ ,

## Lemma1:

Ist  $A$  Arithmetisch, so ist es auch  $A^*$

Beweis:

- ▶ Da  $d(x) = y$  Arithmetisch ist, ex. ein Ausdruck  $D(v_1, v_2)$  mit den einzigen freien Variablen  $v_1$  und  $v_2$   
es gilt:  $D(\bar{x}, \bar{y})$  ist wahr  $\leftrightarrow d(x) = y$
- ▶ Ist  $A$  Arithmetisch, so ex. ein Ausdruck  $F(v_1)$  mit  $v_1$  als einziger freier Variable.  
es gilt:  $F(\bar{n})$  ist wahr  $\leftrightarrow n \in A$
- ▶ Betrachtet man die substituierte Formel  $F(v_2)$ ,
- ▶ dann gilt für den Ausdruck  $F^*(v_1) := \exists v_2 (D(v_1, v_2) \wedge F(v_2))$ :  
 $F^*(\bar{x})$  ist wahr  $\leftrightarrow$  ex. eine Zahl  $y$ :  $d(x) = y$  und  $y \in A$   
 $\leftrightarrow x \in A^*$

## Lemma1:

Ist  $A$  Arithmetisch, so ist es auch  $A^*$

Beweis:

- ▶ Da  $d(x) = y$  Arithmetisch ist, ex. ein Ausdruck  $D(v_1, v_2)$  mit den einzigen freien Variablen  $v_1$  und  $v_2$   
es gilt:  $D(\bar{x}, \bar{y})$  ist wahr  $\leftrightarrow d(x) = y$
- ▶ Ist  $A$  Arithmetisch, so ex. ein Ausdruck  $F(v_1)$  mit  $v_1$  als einziger freier Variable.  
es gilt:  $F(\bar{n})$  ist wahr  $\leftrightarrow n \in A$
- ▶ Betrachtet man die substituierte Formel  $F(v_2)$ ,
- ▶ dann gilt für den Ausdruck  $F^*(v_1) := \exists v_2 (D(v_1, v_2) \wedge F(v_2))$ :  
 $F^*(\bar{x})$  ist wahr  $\leftrightarrow$  ex. eine Zahl  $y$ :  $d(x) = y$  und  $y \in A$   
 $\leftrightarrow x \in A^*$
- ▶ d.h.  $F^*(v_1)$  drückt  $A^*$  aus, damit ist  $A^*$  Arithmetisch, wenn  $A$  Arithmetisch ist.

## Theorem1:

Ist  $A$  Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

- ▶ Zur Erinnerung: Ein Satz  $E_x$  ist Gödelsatz für  $A$  falls gilt:  
 $E_x$  ist wahr  $\leftrightarrow x \in A$

## Theorem1:

Ist  $A$  Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis:

- ▶ Sei  $A$  Arithmetisch und damit nach Lemma1 auch  $A^*$  Arithmetisch.

## Theorem1:

Ist  $A$  Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis:

- ▶ Sei  $A$  Arithmetisch und damit nach Lemma1 auch  $A^*$  Arithmetisch.
- ▶ Ist  $H(v_1)$  die  $A^*$  ausdrckende Formel und  $h$  ihre Gödelnummer,

## Theorem1:

Ist  $A$  Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis:

- ▶ Sei  $A$  Arithmetisch und damit nach Lemma1 auch  $A^*$  Arithmetisch.
- ▶ Ist  $H(v_1)$  die  $A^*$  ausdrckende Formel und  $h$  ihre Gödelnummer,
- ▶ so gilt:  $H[\bar{h}]$  ist wahr  $\leftrightarrow h \in A^* \leftrightarrow d(h) \in A$

## Theorem1:

Ist  $A$  Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis:

- ▶ Sei  $A$  Arithmetisch und damit nach Lemma1 auch  $A^*$  Arithmetisch.
- ▶ Ist  $H(v_1)$  die  $A^*$  ausdrckende Formel und  $h$  ihre Gödelnummer,
- ▶ so gilt:  $H[\bar{h}]$  ist wahr  $\leftrightarrow h \in A^* \leftrightarrow d(h) \in A$
- ▶ Da  $d(h)$  die Gödelnummer von  $H[\bar{h}]$  ist, ist  $H[\bar{n}]$  ein Gödelsatz.

## Theorem2 - Tarskis Theorem:

Die Menge der Gödelnummern der wahren Arithmetischen Sätze ist nicht Arithmetisch.

- ▶ Zur Erinnerung:  $T$  ist folgendermaßen definiert:  
Für alle Ausdrücke  $E_x$  gilt:  $x \in T \leftrightarrow E_x$  ist wahr (Arithmetischer) Satz.

## Theorem2 - Tarskis Theorem:

Die Menge der Gödelnummern der wahren Arithmetischen Sätze ist nicht Arithmetisch.

Beweis:

- ▶ Ann.:  $T$  ist Arithmetisch, dann ist es auch  $\tilde{T}$  (Drückt  $E$  die Menge  $T$  aus, so drückt  $\sim E$  die Menge  $\tilde{T}$  aus)

## Theorem2 - Tarskis Theorem:

Die Menge der Gödelnummern der wahren Arithmetischen Sätze ist nicht Arithmetisch.

Beweis:

- ▶ Ann.:  $T$  ist Arithmetisch, dann ist es auch  $\tilde{T}$  (Drückt  $E$  die Menge  $T$  aus, so drückt  $\sim E$  die Menge  $\tilde{T}$  aus)
- ▶ Dann gibt es einen Gödelsatz  $E_x$  für  $\tilde{T}$

## Theorem2 - Tarskis Theorem:

Die Menge der Gödelnummern der wahren Arithmetischen Sätze ist nicht Arithmetisch.

Beweis:

- ▶ Ann.:  $T$  ist Arithmetisch, dann ist es auch  $\tilde{T}$  (Drückt  $E$  die Menge  $T$  aus, so drückt  $\sim E$  die Menge  $\tilde{T}$  aus)
- ▶ Dann gibt es einen Gödelsatz  $E_x$  für  $\tilde{T}$
- ▶ so gilt:  $x \notin \tilde{T} \leftrightarrow x \in T \leftrightarrow E_x$  ist wahr  $\leftrightarrow x \in \tilde{T}$  Wid.

# Einordnung

- ▶ Der Beweis ist von Tarskis Theorem ist direkt über die Bedingungen  $G_1$  und  $G_2$  des Theorems D aus Kapitel 1 möglich.
- ▶ Informell besagt er zudem, dass es keine Arithmetische Beschreibung von Wahrheit gibt.