3. Vortrag: Arithmetische Relationen und Gödelisierung

1. Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen
2. Verkettung von Zahlen
3. Gödelisierung

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition

$M \subseteq \mathbb{N}^n$ von $F(v_1, ..., v_n)$ definiert, wenn
$(k_1, ..., k_n) \in M \Leftrightarrow F(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$ ist wahr.

$R(x_1, ..., x_n)$ von $F(v_1, ..., v_n)$ definiert, wenn
$R(k_1, ..., k_n)$ erfüllt $\Leftrightarrow F(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$ ist wahr

Beispiel

$2\mathbb{N}$ wird durch $\exists v_2 (v_1 = 0'' \cdot v_2)$ dargestellt.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition: Arithmetisch, arithmetisch

Relation R heißt *Arithmetisch* (mit einem großen A), wenn
$\exists F \in \mathcal{L}_E : F$ definiert R
Relation R heißt *arithmetisch* (mit einem kleinen a), wenn
$\exists F \in \mathcal{L}_E : F$ definiert R und **E** ist nicht in F enthalten.

Bemerkung

Später wird gezeigt:
Arithmetisch $\Leftrightarrow$ arithmetisch.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition: Arithmetische bzw. arithmetische Funktionen

$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *Arithmetisch*, wenn $f(x_1, ..., x_n) = y$ Arithmetisch
$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *arithmetisch*, wenn $f(x_1, ..., x_n) = y$ arithmetisch

Beispiel

$f(x) = x^2 + 3$ ist arithmetisch, weil:
$v_1 \cdot v_1 + 0''' = v_2$ arithmetisch und $x \cdot x + 3 = y$ beschreibt f

Verkettung

Verkettung

Definition: Verkettung $*_b$ zur Basis b

Seien $x, y \in \mathbb{N}$ im Zahlensystem mit der Basis b gegeben.
$\Rightarrow x *_b y$ ist x gefolgt von y in der b-adische Darstellung

Beispiel

b	x	y	$x *_b y$
10	9876	54321	987654321
10	1	0	10
10	0	1	1
2	1	0	10

Definition: $\ell_b(n)$

$\ell_b(n) =$ Länge von n

$$\ell_b(n) = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } n = 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N} | b^k > n\} & \text{, wenn } n > 0 \end{cases}$$

Verkettung

Satz: $x *_b y = z$ ist Arithmetisch

Sei $2 \leq b \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Die Relation $x *_b y = z$ ist Arithmetisch.

Beweis

1. $Pow_b(x) :=$ x ist eine Potenz von b.

$\Rightarrow$ Pow_b Arithmetisch, weil $\exists v_2(v_1 = (\overline{b}\mathbf{E}v_2))$ Arithmetisch

2. $s(x, y) :=$ y ist die kleinste Potenz von b, mit $y > x$.

$s(x, y)$ Arithmetisch, wegen

$Pow_b(y) \wedge x < y \wedge \forall z((Pow_b(z) \wedge x < z) \supset y \leq z$

Verkettung

3. Sei $x > 0$. $\Rightarrow b^{\ell_b(x)} = y \Leftrightarrow s(x, y)$
Sei $x = 0$. $\Rightarrow b^{\ell_b(0)} = b^1 = b$.
$\Rightarrow b^{\ell_b(x)} = y \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = b) \vee (x \neq 0 \wedge s(x, y))$

$x *_b y = z$ entspricht $x \cdot b^{\ell_b(y)} + y = z$, gegeben durch
$\exists z_1 \exists z_2 (b^{\ell_b(y)} = z_1 \wedge x \cdot z_1 = z_2 \wedge z_2 + y = z)$
$\Rightarrow x *_b y = z$ Arithmetisch. $\square$

Verkettung

Bemerkung: Assoziativität

$\forall x, y, z \in \mathbb{N}, y \neq 0 : (x *_b y) *_b z = x *_b (y *_b z)$.
Beispiel für $y = 0$:
$1 *_{10} (0 *_{10} 1) = 1 *_{10} 1 = 11 \neq 101 = 10 *_{10} 1 = (1 *_{10} 0) *_{10} 1$.

Verkettung

Korollar

$\forall b, n \geq 2 : x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n = y$ ist Arithmetisch.

Beweis

Beweis durch vollständige Induktion über $n \geq 2$.

1. Induktionsanfang: $n = 2$
   Dies ist gerade die Aussage des vorhergehenden Satzes.
2. Induktionsvoraussetzung:
   Für $n \geq 2$ sei $x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n = y$ Arithmetisch.
3. Induktionsschritt: $n \to n + 1$
   $x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n *_b x_{n+1} = y$ ist erfüllt $\Leftrightarrow$
   $\exists z(x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n = z \wedge z *_b x_{n+1} = y)$ ist wahr
   $\Rightarrow x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n *_b x_{n+1} = y$ Arithmetisch $\square$

Gödelisierung

Gödelisierung

Ziel:
Sätze sollen Aussagen über sich selbst machen können.

Problem:
Sätze aus $\mathcal{L}_E$ machen nur Aussagen über natürliche Zahlen.

Lösung:
Gödelisierung, d.h. Darstellung von Sätzen durch ihre Gödelnummer

Gödelisierung

Definition: Gödelnummer

1. Ersetzung von Symbolen durch Ziffern (mit η, ε und δ statt $10, 11$ und 12)

Symbol	0	$'$	$($	$)$	f	$,$	v	$\sim$	$\supset$	$\forall$	$=$	$\leq$	$\sharp$
Ziffer	1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	η	ε	δ

2. Ersetzen der Symbole einer Formel
   $\Rightarrow$ Erzeugen einer Ziffernfolge
   $\Rightarrow$ Gödelnummer der Formel (Basis 13)

Gödelisierung

Beispiel

Gödelnummer von $x = 2$
Formel aus $\mathcal{L}_E$: $v_{\prime} = 0''$.
Ersetzung der Symbole

Formel	v	$\prime$	$=$	0	$\prime$	$\prime$
Ziffern	6	5	η	1	0	0

$\Rightarrow$ Gödelnummer ist

$65\eta100_{13} = 6 \cdot 13^5 + 5 \cdot 13^4 + 10 \cdot 13^3 + 1 \cdot 13^2 + 0 \cdot 13^0 + 0 \cdot 13^0 = 2392702_{10}$.

Bemerkung

1. Darstellung von $n \in \mathbb{N}$ durch 13^n
2. Hintereinanderschreiben von Ausdrücken
   $\widehat{=}$ Verkettung der Gödelnummern
3. Verkettung der Nummern ist Arithmetisch
   $\Rightarrow$ Verknüpfung der Ausdrücke durch Arithmetische Formeln darstellbar