

Gödels Unvollständigkeitssätze

Sebastian Henke

May 31, 2007

Gödelsätze

Ein Satz E_n ist Gödelsatz für eine Menge A von Zahlen, wenn entweder E_n wahr ist und seine Gödelnummer in A liegt, oder E_n falsch ist und seine Gödelnummer nicht in A liegt. Für einen Gödelsatz E_n für A gilt:

$$E_n \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A$$

Lemma D - Diagonalisierungslemma

- ▶ a) Für jede Menge A gilt:
Wenn $A^* \in \mathcal{L}$, dann existiert Gödelsatz für A .

Lemma D - Diagonalisierungslemma

- ▶ a) Für jede Menge A gilt:
Wenn $A^* \in \mathcal{L}$, dann existiert Gödelsatz für A .
- ▶ b) Wenn \mathcal{L} G_1 erfüllt, dann existiert für jede Menge $A \in \mathcal{L}$
Gödelsatz für A .

Lemma D - Diagonalisierungslemma: Beweis (a)

a) Für jede Menge A gilt:

Wenn $A^* \in \mathcal{L}$, dann existiert Gödelsatz für A .

BEWEIS:

- ▶ Angenommen H Prädikat, welches A^* in \mathcal{L} ausdrückt, dann h deren Gödelnummer. Weiterhin $d(h)$ Gödelnummer von $H(h)$.

Lemma D - Diagonalisierungslemma: Beweis (a)

a) Für jede Menge A gilt:

Wenn $A^* \in \mathcal{L}$, dann existiert Gödelsatz für A .

BEWEIS:

- ▶ Angenommen H Prädikat, welches A^* in \mathcal{L} ausdrückt, dann h deren Gödelnummer. Weiterhin $d(h)$ Gödelnummer von $H(h)$.
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^*$

Lemma D - Diagonalisierungslemma: Beweis (a)

a) Für jede Menge A gilt:

Wenn $A^* \in \mathcal{L}$, dann existiert Gödelsatz für A .

BEWEIS:

- ▶ Angenommen H Prädikat, welches A^* in \mathcal{L} ausdrückt, dann h deren Gödelnummer. Weiterhin $d(h)$ Gödelnummer von $H(h)$.
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^*$
- ▶ $H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow h \in A^*$

Lemma D - Diagonalisierungslemma: Beweis (a)

a) Für jede Menge A gilt:

Wenn $A^* \in \mathcal{L}$, dann existiert Gödelsatz für A .

BEWEIS:

- ▶ Angenommen H Prädikat, welches A^* in \mathcal{L} ausdrückt, dann h deren Gödelnummer. Weiterhin $d(h)$ Gödelnummer von $H(h)$.
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^*$
- ▶ $H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow h \in A^*$
- ▶ $h \in A^* \Leftrightarrow d(h) \in A$

Lemma D - Diagonalisierungslemma: Beweis (a)

a) Für jede Menge A gilt:

Wenn $A^* \in \mathcal{L}$, dann existiert Gödelsatz für A .

BEWEIS:

- ▶ Angenommen H Prädikat, welches A^* in \mathcal{L} ausdrückt, dann h deren Gödelnummer. Weiterhin $d(h)$ Gödelnummer von $H(h)$.
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^*$
- ▶ $H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow h \in A^*$
- ▶ $h \in A^* \Leftrightarrow d(h) \in A$
- ▶ $H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow d(h) \in A$

Lemma D - Diagonalisierungslemma: Beweis (a)

a) Für jede Menge A gilt:

Wenn $A^* \in \mathcal{L}$, dann existiert Gödelsatz für A .

BEWEIS:

- ▶ Angenommen H Prädikat, welches A^* in \mathcal{L} ausdrückt, dann h deren Gödelnummer. Weiterhin $d(h)$ Gödelnummer von $H(h)$.
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^*$
- ▶ $H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow h \in A^*$
- ▶ $h \in A^* \Leftrightarrow d(h) \in A$
- ▶ $H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow d(h) \in A$
- ▶ Wenn $d(h)$ Gödelnummer von $H(h)$, dann $H(h)$ Gödelsatz von A .

Lemma D - Diagonalisierungslemma: Beweis(b)

b) Wenn \mathcal{L} G_1 erfüllt, dann existiert für jede Menge $A \in \mathcal{L}$
Gödelsatz für A .

BEWEIS: Folgt direkt aus a).



Theorem T:

T sei Menge aller Gödelnummern der wahren Sätze in \mathcal{L} .
Dann gilt nach Tarski folgendes Theorem T:

1. Die Menge \widetilde{T}^* nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.
2. Wenn G_1 gilt, dann \widetilde{T} nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.
3. Wenn G_1 und G_2 gelten, dann T nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.

Theorem T - Beweis 1.

1. Die Menge \widetilde{T}^* nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.

BEWEIS: Zunächst kann es keinen Gödelsatz für die Menge \widetilde{T} geben, weil solch ein Satz genau dann wahr wäre, wenn deren Gödelnummer nicht die Gödelnummer eines wahren Satzes ist.
→ Widerspruch

▶ \widetilde{T}^* in \mathcal{L} ausdrückbar



Theorem T - Beweis 1.

1. Die Menge \widetilde{T}^* nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.

BEWEIS: Zunächst kann es keinen Gödelsatz für die Menge \widetilde{T} geben, weil solch ein Satz genau dann wahr wäre, wenn deren Gödelnummer nicht die Gödelnummer eines wahren Satzes ist.
→ Widerspruch

- ▶ \widetilde{T}^* in \mathcal{L} ausdrückbar
- ▶ $\stackrel{\text{Lemma D}(a)}{\Rightarrow} \exists$ Gödelsatz für Menge $\widetilde{T} \rightarrow$ Widerspruch



Theorem T - Beweis 1.

1. Die Menge \widetilde{T}^* nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.

BEWEIS: Zunächst kann es keinen Gödelsatz für die Menge \widetilde{T} geben, weil solch ein Satz genau dann wahr wäre, wenn deren Gödelnummer nicht die Gödelnummer eines wahren Satzes ist.

→ Widerspruch

- ▶ \widetilde{T}^* in \mathcal{L} ausdrückbar
- ▶ $\overset{\text{Lemma D}(a)}{\Rightarrow} \exists$ Gödelsatz für Menge $\widetilde{T} \rightarrow$ Widerspruch
- ▶ \widetilde{T}^* nicht in \mathcal{L} ausdrückbar



Theorem T - Beweis 2.

1. Wenn G_1 gilt, dann \tilde{T} nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.

BEWEIS:

- ▶ \tilde{T} in \mathcal{L} ausdrückbar $\stackrel{G_1}{\Rightarrow} \tilde{T}^*$ in \mathcal{L} ausdrückbar. \rightarrow
Widerspruch zu 1.



Theorem T - Beweis 3.

1. Wenn G_1 und G_2 gelten, dann Menge T nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.

BEWEIS:

- ▶ Sei T in \mathcal{L} ausdrückbar $\stackrel{G_2}{\Rightarrow} \tilde{T}$ in \mathcal{L} ausdrückbar.
→ Widerspruch zu 2.



Lügnerparadoxon:

- ▶ In einem Land sagen die Einwohner entweder die Wahrheit oder sie Lügen.
- ▶ Athener sagen immer die Wahrheit.
- ▶ Kreter lügen immer.

Frage:

- ▶ Welche Aussage müsste ein Einwohner treffen, damit man ihm glaubt, dass er stets die Wahrheit sagt und er kein Athener ist?

Antwort:

Lügnerparadoxon:

- ▶ In einem Land sagen die Einwohner entweder die Wahrheit oder sie Lügen.
- ▶ Athener sagen immer die Wahrheit.
- ▶ Kreter lügen immer.

Frage:

- ▶ Welche Aussage müsste ein Einwohner treffen, damit man ihm glaubt, dass er stets die Wahrheit sagt und er kein Athener ist?

Antwort:

- ▶ "Ich bin kein Athener."

Widerspruchsfrei und Widerspruchsvoll

Definition:

Wenn kein Satz in \mathcal{L} sowohl beweis- als auch widerlegbar, dann \mathcal{L} **widerspruchsfrei**, sonst **widerspruchsvoll**.

$$\mathcal{L} \text{ widerspruchsfrei} \Leftrightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

Bemerkung:

\mathcal{L} korrekt $\Rightarrow \mathcal{L}$ widerspruchsfrei, weil:

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

Umkehrung ist nicht notwendigerweise wahr!

Entscheidbarkeit und Vollständigkeit

Definition:

Ein Satz heißt **entscheidbar** in \mathcal{L} , wenn entweder beweis- oder widerlegbar in \mathcal{L} , sonst **unentscheidbar** in \mathcal{L} .

Definition:

Ein System \mathcal{L} heißt **vollständig**, wenn jeder Satz in \mathcal{L} entscheidbar und **unvollständig**, wenn in \mathcal{L} ein Satz existiert, der unentscheidbar.

Theorem 1

Theorem 1:

- ▶ Wenn \mathcal{L} korrekt und die Menge \widetilde{P}^* in \mathcal{L} ausdrückbar, dann \mathcal{L} unvollständig.

BEWEIS:

- ▶ Nach Theorem GT existiert ein Satz G , der wahr, aber nicht beweisbar in \mathcal{L} ist.

Theorem 1

Theorem 1:

- ▶ Wenn \mathcal{L} korrekt und die Menge \widetilde{P}^* in \mathcal{L} ausdrückbar, dann \mathcal{L} unvollständig.

BEWEIS:

- ▶ Nach Theorem GT existiert ein Satz G , der wahr, aber nicht beweisbar in \mathcal{L} ist.
- ▶ $G \in \mathcal{T}$

Theorem 1

Theorem 1:

- ▶ Wenn \mathcal{L} korrekt und die Menge \widetilde{P}^* in \mathcal{L} ausdrückbar, dann \mathcal{L} unvollständig.

BEWEIS:

- ▶ Nach Theorem GT existiert ein Satz G , der wahr, aber nicht beweisbar in \mathcal{L} ist.
- ▶ $G \in \mathcal{T}$
- ▶ $\Rightarrow G$ nicht widerlegbar (wegen der Korrektheit)



Theorem 1

Theorem 1:

- ▶ Wenn \mathcal{L} korrekt und die Menge \widetilde{P}^* in \mathcal{L} ausdrückbar, dann \mathcal{L} unvollständig.

BEWEIS:

- ▶ Nach Theorem GT existiert ein Satz G , der wahr, aber nicht beweisbar in \mathcal{L} ist.
- ▶ $G \in \mathcal{T}$
- ▶ $\Rightarrow G$ nicht widerlegbar (wegen der Korrektheit)
- ▶ $\Rightarrow G$ unentscheidbar in \mathcal{L}

Theorem 1

Theorem 1:

- ▶ Wenn \mathcal{L} korrekt und die Menge \widetilde{P}^* in \mathcal{L} ausdrückbar, dann \mathcal{L} unvollständig.

BEWEIS:

- ▶ Nach Theorem GT existiert ein Satz G , der wahr, aber nicht beweisbar in \mathcal{L} ist.
- ▶ $G \in \mathcal{T}$
- ▶ $\Rightarrow G$ nicht widerlegbar (wegen der Korrektheit)
- ▶ $\Rightarrow G$ unentscheidbar in \mathcal{L}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{L}$ unvollständig



Theorem 1^o

Definition:

\mathcal{R} sei Menge aller Gödelnummern der widerlegbaren Sätze aus \mathcal{L} .

Theorem 1^o - Dual von Theorem 1:

Wenn \mathcal{L} korrekt und die Menge \mathcal{R}^* in \mathcal{L} ausdrückbar, dann \mathcal{L} unvollständig. Genauer gesagt, wenn \mathcal{L} korrekt und \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt, dann ist seine Diagonalisierung $\mathcal{K}(k)$ unentscheidbar in \mathcal{L} (k Gödelnummer von \mathcal{K}).

Theorem 1^o - Beweis

BEWEIS:

- ▶ Sei \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt

Theorem 1^o - Beweis

BEWEIS:

- ▶ Sei \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt
- ▶ $\stackrel{\text{Lemma D(a)}}{\Rightarrow} \mathcal{K}(k)$ Gödelsatz für Menge \mathcal{R}

Theorem 1^o - Beweis

BEWEIS:

- ▶ Sei \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt
- ▶ $\stackrel{\text{Lemma D(a)}}{\Rightarrow} \mathcal{K}(k)$ Gödelsatz für Menge \mathcal{R}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ Gödelnummer ist in \mathcal{R}
 $\Leftrightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{K}(k)$ widerlegbar in \mathcal{L}

Theorem 1^o - Beweis

BEWEIS:

- ▶ Sei \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt
- ▶ $\stackrel{\text{Lemma D(a)}}{\Rightarrow} \mathcal{K}(k)$ Gödelsatz für Menge \mathcal{R}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ Gödelnummer ist in \mathcal{R}
 $\Leftrightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{K}(k)$ widerlegbar in \mathcal{L}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k)$ entweder wahr **und** widerlegbar oder falsch **und** nicht widerlegbar

Korrektheit:

Theorem 1^o - Beweis

BEWEIS:

- ▶ Sei \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt
- ▶ $\stackrel{\text{Lemma D(a)}}{\Rightarrow} \mathcal{K}(k)$ Gödelsatz für Menge \mathcal{R}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ Gödelnummer ist in \mathcal{R}
 $\Leftrightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{K}(k)$ widerlegbar in \mathcal{L}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k)$ entweder wahr **und** widerlegbar oder falsch **und** nicht widerlegbar

Korrektheit:

- ▶ $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{K}(k)$ falsch und nicht widerlegbar

Theorem 1^o - Beweis

BEWEIS:

- ▶ Sei \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt
- ▶ $\stackrel{\text{Lemma D(a)}}{\Rightarrow} \mathcal{K}(k)$ Gödelsatz für Menge \mathcal{R}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ Gödelnummer ist in \mathcal{R}
 $\Leftrightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{K}(k)$ widerlegbar in \mathcal{L}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k)$ entweder wahr **und** widerlegbar oder falsch **und** nicht widerlegbar

Korrektheit:

- ▶ $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{K}(k)$ falsch und nicht widerlegbar
- ▶ $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{K}(k)$ nicht beweisbar

Theorem 1^o - Beweis

BEWEIS:

- ▶ Sei \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt
- ▶ $\stackrel{\text{Lemma D(a)}}{\Rightarrow} \mathcal{K}(k)$ Gödelsatz für Menge \mathcal{R}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ Gödelnummer ist in \mathcal{R}
 $\Leftrightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{K}(k)$ widerlegbar in \mathcal{L}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k)$ entweder wahr **und** widerlegbar oder falsch **und** nicht widerlegbar

Korrektheit:

- ▶ $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{K}(k)$ falsch und nicht widerlegbar
- ▶ $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{K}(k)$ nicht beweisbar
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k)$ weder beweis- noch widerlegbar

Theorem 1^o - Beweis

BEWEIS:

- ▶ Sei \mathcal{K} Prädikat, welches \mathcal{R}^* ausdrückt
- ▶ $\stackrel{\text{Lemma D(a)}}{\Rightarrow} \mathcal{K}(k)$ Gödelsatz für Menge \mathcal{R}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ Gödelnummer ist in \mathcal{R}
 $\Leftrightarrow \mathcal{K}(k) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{K}(k)$ widerlegbar in \mathcal{L}
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k)$ entweder wahr **und** widerlegbar oder falsch **und** nicht widerlegbar

Korrektheit:

- ▶ $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{K}(k)$ falsch und nicht widerlegbar
- ▶ $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{K}(k)$ nicht beweisbar
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{K}(k)$ weder beweis- noch widerlegbar
- ▶ $\Rightarrow \mathcal{L}$ unvollständig

Bemerkungen

Wenn \mathcal{L} korrekt und G_1 und G'_3 erfüllt, dann \mathcal{L} unvollständig.

G_1 : Für alle ausdrückbaren Mengen A ist Menge A^* ausdrückbar.

G'_3 : Die Menge \mathcal{R} ausdrückbar.

BEWEIS: $G'_3 \stackrel{G_1}{\Rightarrow} \mathcal{R}^*$ ausdrückbar $\stackrel{\text{Theorem 1}^\circ}{\Rightarrow} \mathcal{L}$ unvollständig.

