# Abstract Forms of Gödel's and Tarski's Theorems

Jan–David Salchow

Humboldt–Universität zu Berlin
Institut für Informatik

1. Juni 2007

# Ziel

Definition einer Formalen Sprache, die bestimmte Kriterien erfüllt, sodass man „leicht“ nachprüfen kann, ob eine gegebene Sprache unvollständig ist (hinreichendes Kriterium).

# Sprachdefinition

Eine Spache $\mathcal{L}$, bestehend aus

- $\mathcal{E}$ (Ausdrücke)
- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ (Sätze)
- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$ (Beweisbar)
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{E}$ (Widerlegbar)
- $\mathcal{H}$ (Prädikate)
- Eine Abbildung $\Phi$, die jedem Ausdruck $E \in \mathcal{E}$ und jeder natürliche Zahl $n$ einen Ausdruck $E(n)$ zuweist.
- $\mathcal{T}$ (Wahre Sätze in $\mathcal{L}$)

# Prädikate in $\mathcal{L}$

## Definition

Die natürliche Zahl $n$ erfüllt das Prädikat $H$, falls $H(n)$ wahr ist, also $H(n) \in \mathcal{T}$ gilt.

## Beispiel

Sei $H(n) := n < 3$. Also gilt

- $H(1)$ und
- $H(4)$ gilt nicht.

# Prädikate in $\mathcal{L}$

## Definition

Die natürliche Zahl $n$ erfüllt das Prädikat $H$, falls $H(n)$ wahr ist, also $H(n) \in \mathcal{T}$ gilt.

## Beispiel

Sei $H(n) := n < 3$. Also gilt

- $H(1)$ und
- $H(4)$ gilt nicht.

# Ausdrückbarkeit in $\mathcal{L}$

## Definition

Das Prädikat $H$ drückt die Menge $A \subset \mathbb{N}$ aus, wenn für alle $a \in A$ gilt $H(n) \in \mathcal{T} \leftrightarrow n \in A$.

## Beispiel

- Sei $H(n) := n < 4$, dann drückt $H(n)$ die Menge $A = \{1, 2, 3\}$ aus.
- Sei $H(n) := n > 0$, dann drückt $H(n)$ die Menge $A = \mathbb{N}$ aus.

# Ausdrückbarkeit in $\mathcal{L}$

## Definition

Das Prädikat $H$ drückt die Menge $A \subset \mathbb{N}$ aus, wenn für alle $a \in A$ gilt $H(n) \in \mathcal{T} \leftrightarrow n \in A$.

## Beispiel

- Sei $H(n) := n < 4$, dann drückt $H(n)$ die Menge $A = \{1, 2, 3\}$ aus.
- Sei $H(n) := n > 0$, dann drückt $H(n)$ die Menge $A = \mathbb{N}$ aus.

# Ausdrückbarkeit in $\mathcal{L}$ (cont.)

## Definition

Eine Menge $A$ heißt ausdrückbar in $\mathcal{L}$, falls ein Prädikat $H$ existiert, dass $A$ ausdrückt.

## Beispiele

- $A := \{1, 2, \dots, 10\}$ wird durch $H(n) := n \leqslant 10$ ausgedrückt
- $A :=$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen wird durch $H(n) := \exists m \in \mathbb{N} : n/2m = 1$ ausgedrückt

# Ausdrückbarkeit in $\mathcal{L}$ (cont.)

## Definition

Eine Menge $A$ heißt ausdrückbar in $\mathcal{L}$, falls ein Prädikat $H$ existiert, dass $A$ ausdrückt.

## Beispiele

- $A := \{1, 2, \ldots, 10\}$ wird durch $H(n) := n \leqslant 10$ ausgedrückt
- $A :=$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen wird durch $H(n) := \exists m \in \mathbb{N} : n/2m = 1$ ausgedrückt

# Gödel Nummerierung und Diagonalisierung

## Definition (Gödel Nummerierung)

Sei $g : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ eine umkehrbare Funktion die einem Ausdruck $E \in \mathcal{E}$ eine natürliche Zahl zuweist und $E_n := g^{-1}(n)$ (Es gilt also $g(E_n) = n$).

## Definition (Diagonalisierung und Diagonalfunktion)

Die Diagonalisierung von $E_n$ ist der Ausdruck $E_n(n)$. Die Diagonalfunktion $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch $d(n) := g(E_n(n))$ definiert.

## Definition

Zu einer Menge $A \subset \mathbb{N}$ ist die Menge $A^*$ definiert durch $A^* = \{n : d(n) \in A\}$, also gilt $A^* = d^{-1}(A)$.

# Gödel Nummerierung und Diagonalisierung

## Definition (Gödel Nummerierung)

Sei $g : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ eine umkehrbare Funktion die einem Ausdruck $E \in \mathcal{E}$ eine natürliche Zahl zuweist und $E_n := g^{-1}(n)$ (Es gilt also $g(E_n) = n$).

## Definition (Diagonalisierung und Diagonalfunktion)

Die Diagonalisierung von $E_n$ ist der Ausdruck $E_n(n)$. Die Diagonalfunktion $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch $d(n) := g(E_n(n))$ definiert.

## Definition

Zu einer Menge $A \subset \mathbb{N}$ ist die Menge $A^*$ definiert durch $A^* = \{n : d(n) \in A\}$, also gilt $A^* = d^{-1}(A)$.

# Gödel Nummerierung und Diagonalisierung

## Definition (Gödel Nummerierung)

Sei $g : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ eine umkehrbare Funktion die einem Ausdruck $E \in \mathcal{E}$ eine natürliche Zahl zuweist und $E_n := g^{-1}(n)$ (Es gilt also $g(E_n) = n$).

## Definition (Diagonalisierung und Diagonalfunktion)

Die Diagonalisierung von $E_n$ ist der Ausdruck $E_n(n)$. Die Diagonalfunktion $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch $d(n) := g(E_n(n))$ definiert.

## Definition

Zu einer Menge $A \subset \mathbb{N}$ ist die Menge $A^*$ definiert durch $A^* = \{n : d(n) \in A\}$, also gilt $A^* = d^{-1}(A)$.

# An Abstract Form of Gödel's Theorem

## Definition

Sei $P$ die Menge der Gödelnummer aller beweisbarer Sätze und $\tilde{A} := \mathbb{N} \setminus A$.

## Satz

*Wenn man* $\tilde{P}^*$ *in* $\mathfrak{L}$ *ausdrücken kann und* $\mathfrak{L}$ *korrekt ist, dann existiert ein wahrer Satz, der in* $\mathfrak{L}$ *nicht beweisbar ist.*

# Beweis des Satzes

## Beweis.

- Drücke das Prädikat $H$ die Menge $\tilde{P}^*$ aus.
- Sei $h := g(H)$ die Gödelnummer von $H$
- $H(n)$ist wahr $\leftrightarrow n \in \tilde{P}^*$
- Also ist $H(h) \in \mathfrak{T} \leftrightarrow h \in \tilde{P}^*$
- $h \in \tilde{P}^* \leftrightarrow d(h) \in \tilde{P} \leftrightarrow d(h) \notin P$
- Aus $d(h) = g(H(h))$ folgt $d(h) \in P \leftrightarrow H(h)$ in $\mathfrak{L}$ beweisbar ist
- $H(h)$ ist wahr $\leftrightarrow H(h)$ in $\mathfrak{L}$ nicht beweisbar
- $\mathfrak{L}$ korrekt $\rightarrow H(h)$ wahr

$\square$

# Prüfung auf Unvollständigkeit

1. $A$ ausdrückbar $\Rightarrow A^*$ ausdrückbar
2. $A$ ausdrückbar $\Rightarrow \tilde{A}$ ausdrückbar
3. $P$ ausdrückbar