Grenzen der Berechenbarkeit

Fabian Müller

23.06.2006

I. Unvollständigkeit von P. A.

Theorem I Das System P. A. ist unvollständig.

(a) Folgerung aus Unvollständigkeit von P. E.:
Da die Menge $\widetilde{P_E}^*$ arithmetisch ist, gibt es eine arithmetische Formel $H(v_1)$ in $\mathcal{L}_A$, die sie ausdrückt. Deren Diagonalisierung $H[\overline{h}]$ ist dann ein arithmetischer Gödelsatz für $\widetilde{P_E}$, also wahr, aber nicht in P. E. beweisbar. Da die Axiome von P. A. aber eine echte Teilmenge der Axiome von P. E. darstellen, ist $H[\overline{h}]$ auch in P. A. nicht beweisbar, also ist P. A. ebenfalls unvollständig.

(b) Ohne Benutzung von P. E.:

- $P_A := \{n \in \mathbb{N} \mid E_n \in \mathcal{P}\}$
- P_A ist Σ: Modifikation des entsprechenden P. E.-Beweises durch Wegnahme der Exponenzierung
- Damit sind $\widetilde{P_A}$ und $\widetilde{P_A}^*$ arithmetisch.
- Ist $H(v_1)$ eine arithmetische Formel, die $\widetilde{P_A}^*$ ausdrückt, so behauptet deren Diagonalisierung $H[\overline{h}]$ ihre eigene Unbeweisbarkeit in P. A.

II. Σ_1-Relationen

Für einige der folgenden Kapitel werden wir die Tatsache benötigen, dass jede Σ-Relation auch Σ_1 ist. Dazu beweisen wir zunächst

Proposition C

(a) Jede Σ_0-Relation ist auch Σ_1.

(b) Ist $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ eine Σ_1-Relation, so gilt dies auch für

$$\exists y R(x_1, \ldots, x_n, y).$$

(c) Sind $R_1(x_1, \ldots, x_n)$ und $R_2(x_1, \ldots, x_n)$ zwei Σ_1-Relationen, so gilt dies auch für

$$R_1(x_1, \ldots, x_n) \vee R_2(x_1, \ldots, x_n)$$

und

$$R_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge R_2(x_1, \ldots, x_n)$$

(d) Ist $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ eine Σ_1-Relation, so gilt dies auch für

$$(\exists y \leq z) R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$$

und

$$(\forall y \leq z) R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$$

(e) Ist R eine Σ_0- und S eine Σ_1-Relation, so ist die Relation $R \supset S$ ebenfalls Σ_1.

Beweis

(a) Es sei $R(x_1, \ldots, x_n)$ eine Σ_0-Relation und $F(v_1, \ldots, v_n)$ eine Σ_0-Formel, die sie ausdrückt. Dann ist

$$\exists v_{n+1} F(v_1, \ldots, v_n)$$

eine Σ_1-Formel, die ebenfalls R ausdrückt.

(b) Zunächst bemerken wir, dass für jede Relation $S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) $\exists y \exists z S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$

(2) $\exists w (\exists y \leq w)(\exists z \leq w) S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$

Offenbar folgt aus (2) sofort (1). Sind nun $x_1, \ldots, x_n$ Zahlen, die (1) erfüllen, so gibt es Zahlen y und z, sodass $S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ erfüllt ist. Setzt man nun $w := \max\{y, z\}$, so erfüllen y und z die Bedingung

$$(\exists y \leq w)(\exists z \leq w) S(x_1, \ldots, x_n, y, z),$$

also ist auch (2) erfüllt.
Sei nun $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ eine Σ_1-Relation. Dann ist R von der Form

$$\exists z S(x_1, \ldots, x_n, y, z),$$

wobei S eine Σ_0-Relation ist. Die behauptete Relation ist damit nach dem oben Bewiesenen äquivalent zu

$$\exists w (\exists y \leq w)(\exists z \leq w) S(x_1, \ldots, x_n, y, z),$$

und diese Relation ist Σ_1, da die Relation

$$(\exists y \leq w)(\exists z \leq w) S(x_1, \ldots, x_n, y, z),$$

eine Σ_0-Relation zwischen $x_1, \ldots, x_n$ und w ist.

(c) Die Behauptung ist äquivalent zu der Aussage, dass für zwei Σ_0-Relationen $S_1(x_1, \ldots, x_n, y)$ und $S_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ die Relationen

$$\exists y S_1(x_1, \ldots, x_n, y) \vee \exists y S_2(x_1, \ldots, x_n, y)$$

und

$$\exists y S_1(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \exists y S_2(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Σ_1 sind. Diese Relationen sind aber äquivalent zu

$$\exists y (S_1(x_1, \ldots, x_n, y) \vee S_2(x_1, \ldots, x_n, y))$$

und

$$\exists y \exists z (S_1(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge S_2(x_1, \ldots, x_n, z)),$$

und mit (b) folgt, dass diese Relationen Σ_1 sind.

(d) Sei $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ eine Σ_1-Relation. Da $y \leq z$ eine Σ_0-Relation ist, ist die Menge K aller Tupel $(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, die $y \leq z$ erfüllen, Σ_0 und damit nach (a) auch Σ_1. Nach (c) ist damit die Relation

$$K(x_1, \ldots, x_n, y, z) \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$$

ebenfalls Σ_1. Diese Relation ist aber nichts anderes als

$$y \leq z \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y, z),$$

und nach (b) ist damit auch

$$\exists y(y \leq z \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y, z))$$

eine Σ_1-Relation. Dies ist aber gerade die erste der beiden Behauptungen.

Zum Beweis der zweiten sei $S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$ eine Σ_0-Relation, sodass $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ äquivalent ist zu

$$\exists w S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w).$$

Seien nun $x_1, \ldots, x_n$ und z Zahlen, die

$$(\forall y \leq z) \exists w S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$$

erfüllen. Definiert man

$$v := \max \{w \mid (\forall y \leq z) S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)\},$$

so gilt für dieses v offenbar

$$(\forall y \leq z)(\exists w \leq v) S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w),$$

also gilt auch

$$\exists v (\forall y \leq z)(\exists w \leq v) S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w),$$

und diese Bedingung impliziert auch umgekehrt die Bedingung

$$(\forall y \leq z) R(x_1, \ldots, x_n, y, z).$$

(e) Mit R ist auch $\widetilde{R}$ eine Σ_0-Relation, also nach (a) auch Σ_1. Nach (c) ist damit $\widetilde{R} \vee S$ ebenfalls Σ_1. Dies ist aber gerade die Relation $R \supset S$.

$\square$

Für jede Formel $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ mit $i_1 < \ldots < i_k$ und jedes $n \geq i_k$ führen wir die Bezeichnung

$$F^{(n)} := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid F(\overline{a_{i_1}}, \ldots, \overline{a_{i_k}})\}$$

ein. Im Falle einer regulären Formel $F(v_1, \ldots, v_n)$ ist $F^{(n)}$ natürlich gerade die durch $F(v_1, \ldots, v_n)$ ausgedrückte Relation.
Mithilfe von Proposition C folgt durch Induktion über den Formelgrad, dass für jede Σ-Formel $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ und jedes $n \geq k$ die Menge $F^{(n)}$ eine Σ_1-Relation ist. Damit folgt, dass jede reguläre Σ-Formel eine Σ_1-Relation ausdrückt, und somit gilt

Proposition $\mathbf{C_1}$ Jede Σ-Relation ist auch Σ_1.

Aus Proposition C_1 und den Korollaren zum Theorem E folgen unmittelbar die beiden Korollare

Korollar 1 Ist A eine Σ_1-Menge ist, so gilt dies auch für A^*.

Korollar 2 Die Mengen P_A^* und R_A^* sind Σ_1.

Definition Eine Relation R heißt *rekursiv*, wenn R und $\widetilde{R}$ beide Σ_1 sind.

Für unsere Sprachen kann man in dieser Definition Σ_1 durch Σ_0 ersetzen.

Die Relationen (1)-(15) in der Arithmetisierung von P. E. sind alle rekursiv. Das folgt aus dem folgenden Theorem:

Theorem D Seien n und k natürliche Zahlen mit $k \leq n$ und $(a_1, \ldots, a_k)$ eine Sequenz von Zahlen aus K_{11}, die alle $\leq n$ sind. Dann gilt für deren Sequenznummer

$$\delta a_1 \delta \ldots \delta a_k \delta \leq 13^{n^2+n+1}.$$

Beweis Wegen $a_j \leq n$ für $j = 1, \ldots, k$ und $k \leq n$ gilt sicherlich

$$\delta a_1 \delta \ldots \delta a_k \delta \leq \underbrace{\delta n \delta \ldots \delta n}_{n-\text{mal}} \delta =: y.$$

Bezeichnet $L(y)$ die Länge von y in der Darstellung zur Basis 13, so gilt wegen $L(n) \leq n$ weiterhin

$$L(y) = n \cdot L(n) + n + 1 \leq n^2 + n + 1,$$

und mit der Abschätzung $y \leq 13^{L(y)}$ folgt daraus die Behauptung.

$\square$

Die einzigen unbeschränkten Quantoren in der Arithmetisierung von P. E. befinden sich in den Formeln $\mathrm{tm}(x)$, $\mathrm{fm}(x)$ und $\mathrm{Pf}(x)$ (E_x ist ein Term, eine Formel bzw. ein Beweis). Die ersteren beiden können über Theorem D beschränkt werden, weil Formationssequenzen für Terme und Formeln stets so gewählt werden können, dass jedes Element kürzer als die folgenden ist. Für $\mathrm{Pf}(x)$ ist dies nicht möglich, da die Modus-Ponens-Regel aus zwei Ausdrücken einen neuen ableitet, der kürzer als der vorhergehende ist.