# arithmetic = Arithmetic

Christoph Berkholz

Proseminar Grenzen der Berechenbarkeit SS 2006

# Gliederung

# Darstellung der Relation $x^y = z$ als Sequenz

Eine Sequenz von Tupeln habe die folgende Form:

- $S = ((0,1),(1,x^1),(2,x^2),...,(y,x^y))$
- $x^y = z$ gilt genau dann, wenn es eine derartige Sequenz gibt, dass $(y,z) \in S$ gilt

# Darstellung der Sequenz S in $\Sigma_1$

Alter sequenz number Begriff, Beispiel:

- Meta-Sprache: 1, 2, 3, $\delta$
- in $L_E$ : $0'\sharp 0''\sharp 0'''\sharp 0''''''''''''$
- Gödelnummer: $10\delta 100\delta 1000\delta 1000000000000$ (sequenz number)

# Darstellung der Sequenz S in $\Sigma_0$

Neuer sequenz number Begriff, Beispiel:

- Meta-Sprache: (0, 1), (1, 2), (2, 4)
- in $\Sigma_E$ : $ff0f1ff1f2ff2f4ff$ (sequenz number) Konkatenation zwischen Zahlen und f

Der frame f:

- f = 2t2 wobei t eine Kette von einsen ist
- f bzw. t muss lang genug sein, um von den anderen Ziffern unterscheidbar zu sein

# Die Relation K(x, y, w)

Lemma K: Sei S eine Sequenz von georneten Paaren natürlicher Zahlen, dann gibt es ein w (die sequenz number von S), sodass gilt:

- $K(x, y, w) \iff (x, y) \in S$
- wenn K(x,y,w) wahr ist, dann ist $x \leq w$ und $y \leq w$

# Der frame f in $\Sigma_0$

1(x) $\Longleftrightarrow$ x besteht nur aus einsen.

- $1(x) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge (\forall y \leq x)(yPx \supset 1Py)$

x mf w $\Longleftrightarrow$ x ist der längste frame, der in w enthalten ist.

- $x\ mf\ w \leftrightarrow xPw \wedge (\exists z \leq w)(1(z) \wedge x = 2z2$
  $\wedge \sim (\exists y \leq w)(1(y) \wedge 2zy2Pw))$

# Die Relation K(x, y, w) in $\Sigma_0$

Die Realtion K(x, y, w) ist in $\Sigma_0$:

- $K(x, y, w) := (\exists f \leq w)(f\ mf\ w \wedge ffxfyffPw \wedge f\tilde{P}x \wedge f\tilde{P}y)$
- Wenn K(x, y, w) wahr ist, dann ist $x \leq w$ und $y \leq w$

# Die Relation $x^y = z$ in $\Sigma_1$

- Erinnerung: Sequenz $S = \big((0,1),(1,x^1),(2,x^2),...,(y,x^y)\big)$ .

Formal: $x^y = z \iff$ es existiert eine Sequenz S von geordneten Paaren, sodass

- (y, z) $\in$ S
- Für jedes Paar (a, b) in S gilt entweder (a, b) = (0, 1) oder es gibt eine Paar (c, d) in S, sodass gilt: $(a,b) = (c+1, d \cdot x)$

# Die Relation $x^y = z$ in $\Sigma_1$

$x^y = z \iff$

- $\exists w(K(y,z,w) \wedge (\forall a \leq w)(\forall b \leq w)$
  $(K(a,b,w) \supset ((a = 0 \wedge b = 1) \vee$
  $(\exists c \leq a)(\exists d \leq b)(K(c,d,w) \wedge a = c + 1 \wedge b = d \cdot x))))$

# Das Beta-Funktion Theorem

Eine Funktion $\beta(x, y)$ ist eine Beta-Funktion, wenn gilt:

- für jede endliche Sequenz $(a_0, a_1, ..., a_n)$ gibt es eine Zahl w, sodass gilt:
- $\beta(w, 0) = a_0, \beta(w, 1) = a_1, ...$ und $\beta(w, n) = a_n$

Theorem B: Beta-Funktion Theorem.

- Es gibt eine Beta-Funktion in $\Sigma_0$

# Beweis von Theorem B

- $\beta(w, i) = k \iff$ K(i, k, w) und k ist die kleinste Zahl, für die K(i, k, w) gilt
- Wenn K(i, k, w) nicht gilt, sei $\beta(w, i) = 0$

In $\Sigma_0$ : $\beta(w, x) = y \iff$

- $(K(x, y, w) \wedge (\forall z < y) \backsim K(x, z, w)) \vee$ $(\backsim (\exists z \leq w) K(x, z, w) \wedge y = 0)$

# Beweis von Theorem B

- Dabei ist für jede Sequenz $(a_0, a_1, ..., a_n)$ w die Sequenznummer von $((0, a_0), (1, a_1), ..., (n, a_n))$
- $\Rightarrow K(i, a_i, w)$ hällt für jedes $i \leq n$
- $a_i$ ist die einzigste Zahl m, für die $K(i, m, w)$ hällt
- $\Rightarrow \beta(w, i) = a_i$

# Beweis von Theorem E mit Beta-Funktionen

Idee: $S = (1, x, x^2, x^3, ..., x^y)$
$x^y = z \iff$

- es existiert eine Sequenz S = $(a_0, a_1, ..., a_y)$ mit
- $a_0 = 1$ und $a_y = z$
- für jedes i < y: $a_{i+1} = a_i \cdot x$

In $\Sigma_1 : x^y = z \iff$

- $\exists w(\beta(w, 0) = 1 \wedge \beta(w, y) = z \wedge$
  $(\forall n < y)(\beta(w, n + 1) = \beta(w, n) \cdot x))$

# Beweis von Theorem E mit Beta-Funktionen

Der Ausdruck $\beta(w, n+1) = \beta(w, n) \cdot x$ in $\Sigma_0$ :

- $(\exists m_1 \leq w)(\exists m_2 \leq w)(\exists m_3 \leq w)(m_1 = n + 1$
  $\wedge \beta(w, m_1) = m_2 \wedge \beta(w, n) = m_3 \wedge m_2 = m_3 \cdot x)$

# A is arithmetic $\iff A^\star$ is arithmetic

Wenn A $\in \Sigma$ ist, dann auch $A^\star$:

- $x^y = z \in \Sigma$
- $\Rightarrow 13^x = y \in \Sigma$
- $\Rightarrow [\exists z(z = 13^x \wedge kz8x3 = y)] \iff [d(x) = y] \in \Sigma$
- $\Rightarrow d(x) = y \iff D(x, y) \in \Sigma$
- $\Rightarrow \exists v_2(D(v_1, v_2) \wedge A(v_2)) \iff A^\star(v_1)$ ist in $\Sigma$, falls $A(v_1)$ in $\Sigma$ ist.

# Tarski's Theorem für $L_A$

Die Menge der Gödelnummern der wahren arithmetic Sätze ist nicht arithmetic

- $T_A$ arithmetic $\Rightarrow \tilde{T_A}$ arithmetic
- $\tilde{T_A}$ arithmetic $\Rightarrow \tilde{T_A}^*$ arithmetic
- $\Rightarrow$ Es kann ein Widerspruch wie im Beweis für $L_E$ erzeugt werden

# $P_E^\star$ und $R_E^\star \in \Sigma, \sim P_E^\star$ ist arithmetic

- $P_E$ und $R_E$ sind $\Sigma$
- $\Rightarrow P_E^*$ und $R_E^*$ sind $\Sigma$
- $P_E$ ist $\Sigma$, also auch arithmetic
- $\Rightarrow \tilde{P_E}$ ist arithmetic
- $\Rightarrow \tilde{P_E}^*$ ist arithmetic