P.A. - Peano Arithmetik ohne Potenzieren

11. Juni 2006

Peano Arithmetik

Peano Arithmetik: (P.E. *ohne* Exponentation)

- ohne Axiom N_{10} : $(v_1 \mathbf{E}\, \overline{0}) = \overline{0}'$
- ohne Axiom N_{11} : $(v_1 \mathbf{E}\, v_2') = ((v_1 \mathbf{E}\, v_2 \cdot v_1)$

Ziel : *Beweis der Unvollständigkeit der Peano Arithmetik (P.A.)*

Unvollständigkeit von P.A. - Wiederholung

Gödel -Tarski Theorem (**GT)**

Wenn $\widetilde{P}^{*}$ in L *ausdrückbar* ist und L ist korrekt, dann ist L unvollständig.

Wiederholung (Forts.)

Bedingungen für die Ausdrückbarkeit von $\widetilde{P}^*$

G1 Wenn A ausdrückbar in L ist, dann ist auch A^* ausdrückbar.

G1$_{P.E.}$ Wenn A Arithmetisch ist, dann ist auch A^* Arithmetisch (Diagonalfunktion)

G2 Wenn A ausdrückbar in L ist, dann ist auch $\widetilde{A}$ ausdrückbar.

G3 P ist ausdrückbar.

G$_{2,3P.E.}$ Konstruktion von Arithmetischen Prädikaten: P_E ist Arithmetisch und $\widetilde{P_E}$ ist Arithmetisch

Wiederholung (Forts.)

Bedingungen für die Ausdrückbarkeit von $\widetilde{P}^*$

G1 Wenn A ausdrückbar in L ist, dann ist auch A^* ausdrückbar.

G1$_{P.E.}$ Wenn A Arithmetisch ist, dann ist auch A^* Arithmetisch (Diagonalfunktion)

G2 Wenn A ausdrückbar in L ist, dann ist auch $\widetilde{A}$ ausdrückbar.

G3 P ist ausdrückbar.

G$_{2,3P.E.}$ Konstruktion von Arithmetischen Prädikaten: P_E ist Arithmetisch und $\widetilde{P_E}$ ist Arithmetisch

Wiederholung (Forts.)

Bedingungen für die Ausdrückbarkeit von $\widetilde{P}^*$

- G1 Wenn A ausdrückbar in L ist, dann ist auch A^* ausdrückbar.
- G1$_{P.E.}$ Wenn A Arithmetisch ist, dann ist auch A^* Arithmetisch (Diagonalfunktion)
- G2 Wenn A ausdrückbar in L ist, dann ist auch $\widetilde{A}$ ausdrückbar.
- G3 P ist ausdrückbar.
- G$_{2,3P.E.}$ Konstruktion von Arithmetischen Prädikaten: P_E ist Arithmetisch und $\widetilde{P_E}$ ist Arithmetisch

Unvollständigkeit für P.A.

Idee:

$\widetilde{P_E}^*$ soll in P.A. ausgedrückt werden

G1$_{P.A.}$ Wenn A arithmetisch ist, dann ist A^* arithmetisch
z.z. Diagonalfunktion ist arithmetisch

G2$_{P.A.}$ $\widetilde{P_E}$ ist arithmetisch

G3$_{P.A.}$ P_E ist arithmetisch

Inhalt des Referats

- P_E und $\widetilde{P_E}$ sind arithmetisch (G2 und G3)
- Klassen von arithmetischen Relationen

Die Klasse Σ_0

atomare Σ_0 - Formeln

$c_1 + c_2 = c_3$, $c_1 \cdot c_2 = c_3$, $c_1 = c_2$, $c_1 \leq c_2$,
wobei c_1, c_2, c_3 Nummern oder Variablen sind.

Σ_0 - Formeln (induktive Definition)

1. Jede atomare Σ_0 - Formel ist Σ_0
2. Wenn F und G Σ_0, dann sind $\sim F$ und $F \supset G$ Σ_0
3. Für jede Σ_0 - Formel F, eine beliebige Variable v_i und jedes c mit($c \neq v_i$ oder c ist Nummer) :
   $\forall v_i(v_i \leq c \supset F)$ Σ_0 - Formel

Die Klasse Σ_1

Definition Σ_1 - Formel

Eine Σ_1 - Formel hat die Form:
$\exists v_{n+1} F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$, wobei $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ eine Σ_0 - Formel ist

Definition Σ_1- Relation

$R(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Σ_1- Relation
gdw. es existiert eine Σ_0 - Relation $S(x_1, \ldots, x_n, y)$, so dass f.a. $x_1, \ldots, x_n$ gilt:
$R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y S(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Die Klasse Σ

Definition Σ - Formel

1. Jede Σ_0 - Formel ist eine Σ - Formel
2. Wenn F Σ_0 ist, dann ist für jedes v_i
   $\exists v_i F$ eine Σ - Formel
3. Wenn F eine Σ - Formel ist, dann sind für v_i und v_j mit $i \neq j$
   $\exists(v_i \leq v_j)F$ und $\forall(v_i \leq v_j)F$ Σ- Formeln, sowie
   für eine Zahl n
   $\exists(v_i \leq \overline{n})F$ und $\forall(v_i \leq \overline{n})F$ Σ- Formeln
4. Für jede Σ - Formel F und G sind
   $F \wedge G$ und $F \vee G$ Σ-Formel
   Wenn F eine Σ_0- Formel ist und G eine Σ- Formel, dann ist
   $F \supset G$ eine Σ - Formel

Konkatenation zur Basis b

$m *_b n = m \cdot b^{l_{b(n)}} + n$ ist Arithmetisch

Relation $b^{l_{b(n)}} = y$ arithmetisch?

1. $b^{l_b(x)} = y \leftrightarrow (x = 0 \wedge y = b) \vee (x \neq 0 \wedge s(x, y))$
2. $s(x, y) \leftrightarrow Pow_b(y) \wedge x < y \wedge \forall z((Pow_b(z) \wedge x < z) \supset y \leq z)$
3. $Pow_b(x) \leftrightarrow \exists v_2(v_1 = (\overline{b} \; \mathbf{E} \; v_2))$

Ziel: *Elimination von* **E** *in* $Pow_b(x)$

Elimination von **E** nach Myhill

Pow$_p$(x) und p ist Primzahl

x ist eine Potenz von $p \leftrightarrow$ jeder echte Teiler von x ist teilbar durch p

Beweis: $y = p^{l_p(n)}$ ist Σ_0

1. x div $y \quad \leftrightarrow \quad (\exists z \leq y)(x \cdot z = y)$
2. $Pow_p(x) \quad \leftrightarrow \quad (\forall z \leq x)((z \text{ div } x \wedge z \neq 1) \supset p \text{ div } z)$
3. $y = p^{l_p(x)} \quad \leftrightarrow \quad (Pow_p(y) \wedge y > x \wedge y > 1) \wedge$
   $(\forall z < y) \sim (Pow_p(z) \wedge z > x \wedge z > 1)$

Proposition A

Für jede Primzahl p ist die Relation $x *_p y = z$ Σ_0.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
& x *_p y = z \\
\leftrightarrow\ & x \cdot p^{l_p(y)} + y = z \\
\leftrightarrow\ & (\exists w_1 \leq z)(\exists w_2 \leq z)(w_1 = p^{l_p(y)} \wedge w_2 = x \cdot w_1 \wedge w_2 + y = z)
\end{aligned}
$$

Proposition B1

Die Relationen xB_py, xE_py, xP_py sind Σ_0

1. $xB_py \leftrightarrow x = y \vee (x \neq 0 \wedge (\exists z \leq y)(\exists w \leq y)(Pow_p(w) \wedge (x \cdot w) *_p z = y))$
2. $xE_py \quad \leftrightarrow \quad x = y \vee (\exists z \leq y)(z *_p x = y)$
3. $xP_py \quad \leftrightarrow \quad (\exists z \leq y)(zE_py \wedge xB_pz)$

Proposition B2

Für jedes $n \geq 2$ ist die Relation $x_1 *_p \cdots *_p x_n = y \quad \Sigma_0$

Induktion über n:

IA) $x_1 *_p x_2 = y$ ist Σ_0 (nach B1)

IS) Nach Induktionsannahme gilt: $x_1 *_p \cdots *_p x_n = y$ ist Σ_0
Dann ist auch $x_1 *_p \cdots *_p x_n *_p x_{n+1} = y \;\; \Sigma_0$, denn
$(\exists z \leq y)(x_1 *_p \cdots *_p x_n = z \wedge z *_p x_{n+1} = y)$ ist Σ_0.

Proposition B3

Für jedes $n \geq 2$: Relation $x_1 *_p \cdots *_p x_n P_p y$ ist Σ_0

Beweis:

andere Darstellung: $(\exists z \leq y)(x_1 *_p \cdots *_p x_n = z \wedge z P_p y)$

kurze Zusammenfassung

arithmetische Relationen (Σ_0)

1. $Pow_p(x)$ (Myhill)
2. $x *_p y = z$ (Prop. A)
3. xB_py, xE_py, xP_py (Prop.B)
4. für $n \geq 2$: $x_1 *_p \cdots *_p x_n P_p y$ und $x_1 *_p \cdots *_p x_n = y$ (Prop.B)

Sei $p = 13\ldots$

arithmetische Bedingungen

- Bedingungen $Seq(x), x \in y$ und $x \overset{z}{\prec} y$ sind arithmetisch
- Bedingungen (1-17) : Sb(x), Var(x), Num(x), ..., P_E und $\widetilde{P_E}$ sind arithmetisch
- insbes. sind P_E und $\widetilde{P_E}$ Σ

Begründung

1. $\mathbf{E}$ wird nie in den Definitionen der Bedingungen verwendet
2. $Pow_{13}(x)$ und $x *_{13} y$ sind (wie gezeigt) arithmetisch (Σ_0)

Unvollständigkeit von P.A.

Lässt sich $\widetilde{P_E}^*$ in P.A. ausdrücken?

G$_{2,3P.A.}$ P_E und $\widetilde{P_E}$ sind arithmetisch

G1$_{P.A.}$ Wenn A arithmetisch ist, dann A^* arithmetisch ?

Diagonalfunktion :

$d(x) = r(x,x) = z \leftrightarrow \exists w(w = 13^x \wedge z = k *_{13} w *_{13} 8 *_{13} x *_{13} 3)$

Unvollständigkeit von P.A.

Lässt sich $\widetilde{P_E}^*$ in P.A. ausdrücken?

$G_{2,3P.A.}$ P_E und $\widetilde{P_E}$ sind arithmetisch

$G1_{P.A.}$ Wenn A arithmetisch ist, dann A^* arithmetisch ?

Diagonalfunktion :

$d(x) = r(x,x) = z \leftrightarrow \exists w(w = 13^x \wedge z = k *_{13} w *_{13} 8 *_{13} x *_{13} 3)$