Proseminar Grenzen der Berechenbarkeit

9. Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

Die logischen Axiom-Gruppen

Bemerkung

Da in den folgenden Axiomen $(L_1 - L_7)$ F, G, H *für beliebige Formeln stehen nennt man sie Axiom-Schemen; da sie somit eine unendlich große Anzahl an Axiomen repräsentieren. Sie sind eine Formalisierung der Logik der ersten Stufe.*

Peano Axiome - Gruppe I - Axiom Schemen der Aussagenlogik

- $L_1 : (F \supset (G \supset F))$
- $L_2 : (F \supset (G \supset H)) \supset ((F \supset G) \supset (F \supset H))$
- $L_3 : ((\sim F \supset \sim G) \supset (G \supset F))$

Peano Axiome - Gruppe II - Zusätzlich Axioms-Schemen der Logik der ersten Stufe

- $L_4 : \forall v_i(F \supset G) \supset (\forall v_i F \supset \forall v_i G))$
- $L_5 : (F \supset \forall v_i F)$, für $v_i \notin var(F)$
- $L_6 : \exists v_i(v_i = t)$, für $v_i \notin var(t)$
- $L_7 : (v_i = t \supset (X_1 v_i X_2 \supset X_1 t X_2))$, X_1, X_2 sind beliebige Ausdrücke sodass $X_1 v_i X_2$ eine atomare Formel ist

- $N_1 : (v_1' = v_2' \supset v_1 = v_2)$
- $N_2 : \sim \overline{0} = v_i'$
- $N_3 : (v_1 + \overline{0}) = v_1$
- $N_4 : (v_1 + v_2') = (v_1 + v_2)'$
- $N_5 : (v_1 \cdot \overline{0}) = \overline{0}$
- $N_6 : (v_1 \cdot v_2') = ((v_1 \cdot v_2) + v_1)$
- $N_7 : (v_1 \leq \overline{0} \equiv v_1 = \overline{0})$
- $N_8 : (v_1 \leq v_2' \equiv (v_1 \leq v_2 \vee v_1 = v_2'))$
- $N_9 : ((v_1 \leq v_2) \vee (v_2 \leq v_1))$
- $N_{10} : (v_1 E \overline{0}) = \overline{0}'$
- $N_{11} : (v_1 E v_2') = ((v_1 E v_2) \cdot v_1)$

Definition

Ersetzung anstelle von Substitution
$F[v_1'] \equiv \forall v_i(v_i = v_1' \supset \forall v_1(v_1 = v_i \supset F))$

- $N_{12} : (F[\overline{0}] \supset (\forall v_1(F(v_1) \supset F[v_1']) \supset \forall v_1 F(v_1)))$

Beweise im P.E.

Beweise sind endliche Sequenzen, sodass jedes Element der Sequenz entweder ein Axiom ist oder mittels M.P. oder der Generalisierung aus den vorigen Elementen folgt.
M.P. : aus F, $(F \supset G)$ *folgt* G
Generalisierung: aus F *folgt* $\forall v_i F$

Ziel: arithmetische Darstellung von P(X), um damit die Unvollständigkeit der P.E.-Systems zu zeigen

Bemerkung

Da dieses Relation sehr schwer auf einmal arithmetisch darstellbar ist und außerdem dann auch unlesbar wäre, wird die Relation über viele, leicht zu verstehende, Teilschritte dargestellt.

Die Relationen xB_by, xE_by, XP_by

Definition

1. $xB_by \Rightarrow$ die Zahl y beginnt mit der Zahl x. ([B]egins)
2. $xE_by \Rightarrow$ die Zahl y mit der Zahl x. ([E]nds)
3. $xP_by \Rightarrow$ die Zahl x ist in der Zahl y enthalten ([P]art of)

Die Relationen sind arithmetisch

Beweis.

1. $xB_by \leftrightarrow$
   $x = y \vee (x \neq 0 \wedge (\exists z \leq y)(\exists w \leq y)(Pow_b(w) \wedge (x \cdot w) *_b z = y))$
2. $xE_by \leftrightarrow x = y \vee (\exists z \leq y)(z *_b x = y)$
3. $xP_by \leftrightarrow (\exists z \leq y)(zE_by \wedge xB_bz)$

$\square$

Definition Endliche Sequenzen

Definition

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ ein Tupel von Ausdrücken. Dann wählen wir $\sharp X_1 \sharp \ldots \sharp X_n \sharp$ als geeignette Repräsentation. Ein Tupel von Ausdrücken nennen wir von nun an Sequenz.

Definition

Die Gödelnummer von $\sharp$ sei δ und somit ist die Gödelnummer einer Sequenz $(a_1, \ldots, a_n)$ die Nummer $\delta a_1 \delta \ldots \delta a_n \delta$

Sequenz - Relationen

Definition

1. $Seq(x) \leftrightarrow$ x ist eine Sequenznummer
2. $x \in y \leftrightarrow$ y eine Sequenznummer ist in der x enthalten ist
3. $x \prec_z y \leftrightarrow$ falls z eine Sequenz ist in der x vor y enthalten ist

Behauptung

Die Relationen $Seq(x)$, $x \in y$, $x \prec_z y$ sind arithmetisch

Beweis.

1. $Seq(x) \leftrightarrow \delta Bx \wedge \delta Ex \wedge \delta \neq x \wedge \delta\delta\widetilde{P}x \wedge (\forall y \leq x)(\delta 0yPx \supset \delta By)$
2. $x \in y \leftrightarrow Seq(y) \wedge \delta x \delta Py \wedge \delta\widetilde{P}x$
3. $x \prec_z y \leftrightarrow x \in z \wedge y \in z \wedge (\exists w \leq z)(wBz \wedge x \in w \wedge \sim y \in w)$

$\square$

Term/Formel - Bildungs - Relationen

Definition

1. $\mathcal{R}_t(X, Y, Z) \leftrightarrow Z$ eines der folgenden Ausdrücke ist. $(X + Y)$, $(X \cdot Y)$, (X E Y) oder X'
2. $X_1, \ldots, X_n$ ist eine Term-Bildungs-Sequenz $\leftrightarrow X_i$ ist eine Zahl/Variable oder es existieren $j, k < i$ mit $\mathcal{R}_t(X_j, X_k, X_i)$
3. $\mathcal{R}_f(X, Y, Z) \leftrightarrow Z$ eines der folgenden Formeln ist. $\sim X$, $(X \supset Y)$ $\forall v_i X$ für eine beliebige Variable v_i
4. $X_1, \ldots, X_n$ ist eine Formel-Bildungs-Sequenz $\leftrightarrow X_i$ ist eine atomare Formel oder es existieren $j, k < i$ mit $\mathcal{R}_f(X_j, X_k, X_i)$

Erinnerung

Zur Erinnerung noch einmal die Gödelnummern:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 0 & ' & (&) & f & , & v & \sim & \supset & \forall & = & \leq & \sharp \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \eta & \epsilon & \delta \end{array}$$

Definition

- $(E_x \supset E_y) := x \ imp \ y$
- $\sim E_x := neg(x)$
- $(E_x + E_y) := x \ pl \ y$
- $(E_x \cdot E_y) := x \ tim \ y$
- $(E_x \ E \ E_y) := x \ exp \ y$
- $E'_x := s(x)$
- $E_x = E_y := x \ id \ y$
- $E_x \leq E_y := x \ le \ y$

Arithmetisierung des P.E.

- $Sb(x) \leftrightarrow (\forall y \leq x)(yPx \supset 5Py)$
  E_x ist ein Indize
- $Var(x) \leftrightarrow (\exists y \leq x)(Sb(y) \wedge x = 26y3)$
  E_x ist eine Variable
- $Num(x) \leftrightarrow Pow_{13}(x)$
  E_x ist eine Nummer
- $R_1(x, y, z) \leftrightarrow z = x\ pl\ y \vee z = x\ tim\ y \vee z = x\ exp\ y \vee z = s(x)$
  $\mathcal{R}_t(E_x, E_y, E_z)$ ist arithmetisch darstellbar

Arithmetisierung des P.E.

- $Seqt(x) \leftrightarrow Seq(x) \wedge (\forall y \in x)(Var(y) \vee Num(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R1(z, w, y))$
  E_x ist eine Term-Bildungssequenz
- $tm(x) \leftrightarrow \exists y(Seqt(y) \wedge x \in y)$
  E_x ist ein Term
- $f_0(x) \leftrightarrow (\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(tm(y) \wedge tm(z) \wedge (x = y\ id\ z \vee x = y\ le\ z))$
  E_x ist eine atomare Formel
- $Gen(x, y) \leftrightarrow (\exists z \leq y)(Var(z) \wedge y = 9zx)$
  Generalisierung lässt sich darstellen

- $R_2(x, y, z) \leftrightarrow z = x \; imp \; y \vee z = neg(x) \vee Gen(x, z)$
  $\mathcal{R}_f(E_x, E_y, E_z)$ ist arithmetisch darstellbar
- $Seqf(x) \leftrightarrow Seq(x) \wedge (\forall y \in x) f_0(y) \vee (\exists z, w \prec_x y) R_2(z, w, y)$
  E_x ist eine Formel-Entwicklungssequenz
- $fm(x) \leftrightarrow \exists y (Seqf(y) \wedge x \in y)$
  E_x ist eine Formel
- $A(x)$
  E_x ist ein Axiom

Arithmetisierung des P.E.

- $M.P.(x, y, z) \leftrightarrow y = x \; imp \; z$
  E_z folgt aus dem M.P. aus E_x und E_y
- $Der(x, y, z) \leftrightarrow M.P(x, y, z) \vee Gen(x, z)$
  E_z ist ableitbar aus E_x und E_y
- $Pf(x) \leftrightarrow Seq(x) \wedge (\forall y \in x)(A(y) \vee (\exists z, w \prec_x y) Der(z, w, y))$
  E_x ist ein Beweis
- $P_E(x) \leftrightarrow \exists y (Pf(y) \wedge x \in y)$
  E_x ist beweisbar
- $R_E(x) \leftrightarrow P_E(neg(x))$
  E_x ist widerlegbar

Gödels Unvollständigkeitstheorem für P.E.

- Wir können P(x) und $R(x) = \sim P(x)$ darstellen.
- Dadurch können wir auch $\widetilde{P}^*(x)$ darstellen (siehe letztes Kapitel).
- Damit ist die Unvollständigkeit gezeigt.