III. Tarskis Theorem

Worüber reden wir?

T ist eine Menge von Gödelnummern von wahren Sätze aus $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}$. Ist *T* Arithmetisch?

Tarski Theorem antwortet: *NEIN*

Wiederholung

E_n ist Gödelsatz für A, wenn:

- E_n ist wahr und $n \in A$ oder
- E_n ist falsch und $n \notin A$.

$$\underline{\mathbf{E_n \in T \Leftrightarrow n \in A}}$$

Wir zeigen jetzt, dass für jede Menge A gibt es Gödelsatz.

$F[\bar{n}]$

$F(v_1)$ ist ein Formel, v_1 ist freie Variabel.
Satz $F(\bar{n})$ ist äquivalent zu $\forall v_1(v_1 = \bar{n} \supset F(v_1))$.

Also: weiter werden wir einfach $F[\bar{n}]$ statt $\forall v_1(v_1 = \bar{n} \supset F(v_1))$ schreiben.

$F(v_1)$ und $F[\bar{n}]$ sind äquivalent aber nicht gleich!

F[$\bar{n}$]

Für beliebige n Ausdruck *E* (egal ob *E* ist ein Formel, oder nicht) ist $\forall v_1(v_1 = \bar{n} \supset E)$ auch ein Ausdruck.

Gödelnummer

- $r(e, n)$ ist Gödelnummer von $E[\bar{n}]$ mit

  e – Gödelnummer von E

  Dann:

- Für beliebige x und y ist $r(x, y)$ Gödelnummer von $E_x[\bar{y}]$.

- Zu zeigen: *r(x, y) ist Arithmetisch*.

Diagonalisierung

- Es sei $d(x) = r(x, x)$.
- $d(x)$ nennen wir Diagonalfunktion, d ist Arithmetisch, weil $r(x, y)$ ist Arithmetisch.
- Für jedes n ist $d(n)$ Gödelnummer von $E_n[\bar{n}]$
- Für jede Menge A es sei A^* die Menge von alle n mit Eigenschaft: $d(n) \in A$.

Lemma 1

Wenn die Menge *A* Arithmetisch ist, so ist es auch die Menge *A*.*

(Das Lemma entspricht der Eigenschaft G_1 vom ersten Kapitel)

Theorem 1

Für jede Arithmetische Menge *A* gibt es einen Gödelsatz für *A*.

(Das Theorem entspricht dem Lemma D(b) vom ersten Kapitel)

Theorem 2 – Tarskis Theorem

Die Menge *T* der Gödelnummern wahren Sätze ist nicht Arithmetisch.