Die Sprache L_E

Zeichensatz

$$0 \quad ' \quad (\quad) \quad f \quad , \quad v \quad \sim \quad \supset \quad \forall \quad = \quad \leq \quad \#$$

Bedeutungen und Kurzschreibweisen

0 und $'$ dienen für die natürlichen Zahlen: $0\overbrace{'\cdots\cdots'}^{n\text{-mal}} = \overline{n}$

f und , dienen für die Funktionen: $f, = f_1$ und $f_1(x,y) = x + y$

$f,, = f_2$ und $f_2(x,y) = x \cdot y$

$f,,, = f_3$ und $f_3(x,y) = x \;\mathbf{E}\; y$

$' = f_0$ und $f_0(x) = x + 1$

v und , dienen für die Variablen: $v\underbrace{,\cdots\cdots,}_{n\text{-mal}} = v_n$

„$\sim$“ = „$\neg$“ und „$\supset$“ = „$\rightarrow$“

die dazu gehörige Logik der ersten Stufe

$(\mathbb{N}, f_0, f_1, f_2, f_3, \leq, 0)$ ist die Arithmetik in der Logik der ersten Stufe

Arithemetik und arithmetik

Definition

für Mengen

Eine Menge A heißt ***Arithmetisch***, falls eine Formel $F \in L_E$ existiert, so dass gilt: $F(\overline{n}) \Leftrightarrow n \in A$
Falls zu dem eine Formel $T \in L_E$ existiert mit **E** nicht in T, so dass gilt $T(\overline{n}) \Leftrightarrow n \in A$, so heißt A auch ***arithmetisch***.

für Relationen

Eine Relation R heißt ***Arithmetisch***, falls eine Formel $F \in L_E$ existiert, so dass gilt: $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}) \Leftrightarrow R(k_1, \ldots, k_n)$
Falls zu dem eine Formel $T \in L_E$ existiert mit **E** nicht in T, so dass gilt $T(\overline{k_1, \ldots, k_n}) \Leftrightarrow R(k_1, \ldots, k_n)$, so heißt R auch ***arithmetisch***.

für Funktionen

Eine Funktion f heißt ***Arithmetisch***, falls die Relation R definiert durch $R(x_1, \ldots, x_n, y) \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = y$ Arithmetisch ist.
f heißt arithmeisch, falls R ***arithmetisch*** ist.

Beispiele

1. x teilt y

$$x|y \Leftrightarrow F(x,y) = (\exists\ z \in \mathbb{N} : x \cdot z = y)$$

2. Menge der Primzahlen M_p

$$x \in M_p \Leftrightarrow F(x) = ((x \neq 1) \wedge (\forall y : y|x \Rightarrow ((y = 1) \vee (y = x))))$$

3. Wenn A und f arithmetisch sind, so ist auch $f^{-1}(A)$ arithmetisch

Gödelisierung und Konkatenation

Konkatenation

Konkatenationen für Zeichenketten sind uns wohlbekannt. Im folgenden geht es um Funktionen, die das Konkatenieren zweier Zahlen in einer bestimmten Zahlendarstellung, darstellen, in dem sie die Zahl liefern die in der bestimmten Zahlendarstelung die Konkatenation der zwei Zahlen ist.
Hier geht es uns im besonderen dann um Konkatenationen für Gödel-Nummerierungen.

Definition Konkatenation für eine Basis $b \geq 2$

Für $b \geq 2$ sei $x *_b y = x \cdot b^{l_b(y)} + y$.
Dabei liefert $b^{l_b(y)}$ die kleinste Potenz von b, die größer als y ist, denn l_b liefert die Länge einer Zahl in der Darstellung zur Basis b.
Dies liefert uns eine Konkatenation für die Basis b.

Beispiele

$(5 *_{10} 0) *_{10} 3 = 50 *_{10} 3 = 503$
$5 *_{10} (0 *_{10} 3) = 5 *_{10} 3 = 53 \Rightarrow *_b$ ist linksassoziativ

Satz

Für jedes $b \geq 2$ ist $*_b$ Arithmetisch.

Beweis des Satzes

Da der Beweis beim Vortrag etwas kurz gekommen ist, gibt es ihn hier nochmals ausführlich.

Es ist zu zeigen: $\exists\ R(v_1, v_2, v_3) \in L_E : R(\overline{m}, \overline{n}, \overline{o}) \Leftrightarrow m *_b n = o$

1. Sei $Pow_b(x)$ eine Relation, die ausdrückt x ist eine Potenz von b

$$Pow_b(v_1) = \exists v_2(v_1 = \overline{b}\ \mathbf{E}\ v_2)$$

Diese Relation ist Arithmetisch.

2. Gesucht ist nun eine Relation für $P_b(x, y) \Leftrightarrow b^{l_b(x)} = y$. Es gilt:

$$P_b(x, y) = (x = 0 \wedge y = b) \vee (x \neq 0 \wedge s(x, y))$$

wobei $s(x, y)$, die Relation ist, so dass gilt y ist die kleinste Potenz von b, die größer als x ist.

$$s(x, y) = Pow_b(y) \wedge (x < y) \wedge \forall z((Pow_b(z) \wedge (x < z)) \rightarrow (y \leq z))$$

in L_E bis auf „$\wedge$“:

$$s(v_1, v_2) = Pow_b(v_2) \wedge (v_1 < v_2) \wedge \forall v_3((Pow_b(v_3) \wedge (v_1 \leq v_3) \wedge \sim (v_1 = v_3)) \supset (v_2 \leq v_3))$$

Diese Relation ist Arithmeitisch, da sie die Arithmetische Relation Pow_b benutzt.

3. Die Realtion $R(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \Leftrightarrow x \cdot b^{l_b(y)} + y = z$ (was gleich $x *_b y = z$ ist) Es gilt:

$$R(x, y, z) = \exists z_1 \exists z_2 : (P_b(y, z_1) \wedge x \cdot z_1 = z_2 \wedge z_2 + y = z)$$

in L_E bis auf „$\wedge$“, „$\cdot$“ und „$\exists$“:

$$R(v_1, v_2, v_3) = \exists v_4(\exists v_5((P_b(v_2, v_4) \wedge v_1 \cdot v_4 = v_5 \wedge v_5 + v_2 = v_3)))$$

Diese Relation ist Arithmetisch, da sie die Arithmetische Relation P_b verwendet.

Korollar

Die Konkatenation von endlich vielen Zahlen dargestellt zur Basis $b \geq 2$ über $*_b$ ist Aretithmetisch.

Der Beweis dazu läuft über vollständiger Induktion unter Vwerwendung des vorherigen Satzes.

Gödelisierung

Gödelisierung ist die Erstellung einer Gödel-Nummerierung zu einer Sprache. Dies tun wir da Ausdrücke aus L_E nur über Zahlen etwas aussagen und wir über diesen Umweg Ausdrücke aus L_E über sich selbst etwas aussagen lassen können, in dem sie über ihre Gödel-Nummern reden.

Eine Gödel-Nummmerierung von L_E

Gödelisierung von L_E zur Basis 13.
Da wir für L_E 13 Zeichen haben, erhält jedes Zeichen eine Ziffer. Die Ziffer für 10 ist „η“, für 11 „ε“ und für 12 „δ“.
Die Zuweisung der Zeichen zu den Ziffern ist wie folgt:

0	$'$	$($	$)$	f	$,$	v	$\sim$	$\supset$	$\forall$	$=$	$\leq$	$\#$
1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	η	ε	δ

Für diese Gödelisierung gilt:
$*_b$ ist eine Konkatenation, da es keine führenden Nullen in sinnvollen Ausdrücken gibt
$\overline{n}$ hat die Gödelnummer 13^n

notwendige Eigenschaften einer Gödel-Nummerierung

1. Es existiert eine Arithmetische Funktion für die Konkatenation

2. Für alle n ist die Gödelnummer von $\overline{n}$ eine Arithmetische Funktion von n

Anmerkung

Die von uns gewählte Gödel-Nummerierung erfüllt, diese Eigenschaften auf sehr schöne Art und Weise.

Die Konkatenation ist einfach $*_b$, wobei $b = 13$ die Basis der Zahlendarstellung der Gödel-Nummern ist. Brauchten also nicht extra für L_E eine extra Konkatenation definieren, zudem haben wir eine Primzahl als Basis der Zahlendarstellung.
Auch für $\overline{n}$ haben wir bei dieser Gödel-Nummerierung eine besonders schöne/einfache Arithmetische Funktion.