Gödels Beweis auf der Grundlage der ω-Konsistenz

Katja Gerasymova

Proseminar: Grenzen der Berechenbarkeit

Gliederung

1. Definitionen
   - ω-Konsistenz
   - Rekursive Axiomatisierbarkeit
2. Gödels Unvollständigkeitstheorem
3. Einige abstrakte Unvollständigkeitssätze
   - Repräsentierbarkeit
   - Lemma 1
   - Theorem 1

Gliederung

1. Definitionen
   - ω-Konsistenz
   - Rekursive Axiomatisierbarkeit
2. Gödels Unvollständigkeitstheorem
3. Einige abstrakte Unvollständigkeitssätze
   - Repräsentierbarkeit
   - Lemma 1
   - Theorem 1

Gliederung

1. Definitionen
   - ω-Konsistenz
   - Rekursive Axiomatisierbarkeit
2. Gödels Unvollständigkeitstheorem
3. Einige abstrakte Unvollständigkeitssätze
   - Repräsentierbarkeit
   - Lemma 1
   - Theorem 1

Begriffe der Korrektheit und Konsistenz

Wiederholung

Definition

Ein System ist **korrekt**, wenn jeder beweisbare Satz wahr und jeder widerlegbare Satz falsch ist.

$\mathcal{S}$ korrekt $\Longrightarrow \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$

$\mathcal{S}$ korrekt $\Longrightarrow \mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \varnothing$

Definition

Ein System ist **konsistent** oder **widerspruchsfrei**, wenn kein Satz gleichzeitig beweis- und widerlegbar ist.

$\mathcal{S}$ konsistent $\Longleftrightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \varnothing$

Begriffe der Korrektheit und Konsistenz

Wiederholung

Definition

Ein System ist **korrekt**, wenn jeder beweisbare Satz wahr und jeder widerlegbare Satz falsch ist.

$\mathcal{S}$ korrekt $\Longrightarrow \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$

$\mathcal{S}$ korrekt $\Longrightarrow \mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \varnothing$

Definition

Ein System ist **konsistent** oder **widerspruchsfrei**, wenn kein Satz gleichzeitig beweis- und widerlegbar ist.

$\mathcal{S}$ konsistent $\Longleftrightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \varnothing$

Begriff der ω-Inkonsistenz und ω-Konsistenz

Definition

Ein System ist ω**-inkonsistent**, wenn es eine Formel $\mathcal{F}(w)$ mit einer freien Varialblen w gibt, so dass der Satz $\exists w \mathcal{F}(w)$ beweisbar ist, aber alle Sätze $\mathcal{F}(\overline{0})$, $\mathcal{F}(\overline{1})$,..., $\mathcal{F}(\overline{n})$, ... widerlegbar sind.

Definition

Ein System ist ω**-konsistent**, wenn es nicht ω**-inkonsistent** ist.

Begriff der ω-Inkonsistenz und ω-Konsistenz

Definition

Ein System ist ω**-inkonsistent**, wenn es eine Formel $\mathcal{F}(w)$ mit einer freien Varialblen w gibt, so dass der Satz $\exists w \mathcal{F}(w)$ beweisbar ist, aber alle Sätze $\mathcal{F}(\overline{0})$, $\mathcal{F}(\overline{1})$,$\ldots$, $\mathcal{F}(\overline{n})$, $\ldots$ widerlegbar sind.

Definition

Ein System ist ω**-konsistent**, wenn es nicht ω**-inkonsistent** ist.

Zusammenhänge zwischen der Korrektheit, ω-Konsistenz und Konsistenz

- Korrektes System kann nicht ω-inkonsistent sein.
- ω-inkonsistentes System kann konsistent sein.
- $\mathcal{S}$ inkonsistent $\Longrightarrow$ ω-inkonsistent
- $\mathcal{S}$ ω-konsistent $\Longrightarrow$ konsistent

Zusammenhänge zwischen der Korrektheit, ω-Konsistenz und Konsistenz

- Korrektes System kann nicht ω-inkonsistent sein.
- ω-inkonsistentes System kann konsistent sein.
- $\mathcal{S}$ inkonsistent $\Longrightarrow$ ω-inkonsistent
- $\mathcal{S}$ ω-konsistent $\Longrightarrow$ konsistent

Zusammenhänge zwischen der Korrektheit, ω-Konsistenz und Konsistenz

- Korrektes System kann nicht ω-inkonsistent sein.
- ω-inkonsistentes System kann konsistent sein.
- $\mathcal{S}$ inkonsistent $\Longrightarrow$ ω-inkonsistent
- $\mathcal{S}$ ω-konsistent $\Longrightarrow$ konsistent

Zusammenhänge zwischen der Korrektheit, ω-Konsistenz und Konsistenz

- Korrektes System kann nicht ω-inkonsistent sein.
- ω-inkonsistentes System kann konsistent sein.
- $\mathcal{S}$ inkonsistent $\Longrightarrow$ ω-inkonsistent
- $\mathcal{S}$ ω-konsistent $\Longrightarrow$ konsistent

Begriff der rekursiven Axiomatisierbarkeit (oder einfach Axiomatisierbarkeit)

Definition

Ein System ist **rekursiv axiomatisierbar**, wenn die Menge $\mathcal{P}$ von Gödelnummern der beweisbaren Formeln Σ_1 ist.

Beispiel

- Das System P.A. ist axiomatisierbar.
- Das System $\mathcal{N}$ (vollständige Theorie der Arithmetik) ist nicht axiomatisierbar. Alle korrekten mathematischen Formeln gehören zu Axiomen von $\mathcal{N}$, damit sind sie alle beweisbar. $\mathcal{P}$ von $\mathcal{N}$ ist nicht mal arithmetisch.

Begriff der rekursiven Axiomatisierbarkeit (oder einfach Axiomatisierbarkeit)

Definition

Ein System ist **rekursiv axiomatisierbar**, wenn die Menge $\mathcal{P}$ von Gödelnummern der beweisbaren Formeln Σ_1 ist.

Beispiel

- Das System P.A. ist axiomatisierbar.
- Das System $\mathcal{N}$ (vollständige Theorie der Arithmetik) ist nicht axiomatisierbar. Alle korrekten mathematischen Formeln gehören zu Axiomen von $\mathcal{N}$, damit sind sie alle beweisbar. $\mathcal{P}$ von $\mathcal{N}$ ist nicht mal arithmetisch.

Begriff der rekursiven Axiomatisierbarkeit (oder einfach Axiomatisierbarkeit)

Definition

Ein System ist **rekursiv axiomatisierbar**, wenn die Menge $\mathcal{P}$ von Gödelnummern der beweisbaren Formeln Σ_1 ist.

Beispiel

- Das System P.A. ist axiomatisierbar.
- Das System $\mathcal{N}$ (vollständige Theorie der Arithmetik) ist nicht axiomatisierbar. Alle korrekten mathematischen Formeln gehören zu Axiomen von $\mathcal{N}$, damit sind sie alle beweisbar. $\mathcal{P}$ von $\mathcal{N}$ ist nicht mal arithmetisch.

Begriff der Subsystem und Erweiterung

Wiederholung

Definition

Ein System $\mathcal{S}_1$ ist ein **Subsystem** von $\mathcal{S}$ oder $\mathcal{S}$ ist eine **Erweiterung** von $\mathcal{S}_1$, wenn alle beweisbaren Formeln aus $\mathcal{S}_1$ auch in $\mathcal{S}$ beweisbar sind.

Beispiel

Das System P.A. ist ein Subsystem von $\mathcal{N}$.

Begriff der Subsystem und Erweiterung

Wiederholung

Definition

Ein System $\mathcal{S}_1$ ist ein **Subsystem** von $\mathcal{S}$ oder $\mathcal{S}$ ist eine **Erweiterung** von $\mathcal{S}_1$, wenn alle beweisbaren Formeln aus $\mathcal{S}_1$ auch in $\mathcal{S}$ beweisbar sind.

Beispiel

Das System P.A. ist ein Subsystem von $\mathcal{N}$.

Großes Ziel: Theorem G.[1]

Theorem G.

Wenn Peano Arithmetik ω-konsistent ist, dann ist sie unvollständig.

[1] Gödels Unvollständigkeitstheorem für Peano Arithmetik

Theorem G. als Forgerung aus Theorem A. und Theorem B.

Theorem A.

Wenn $\mathcal{S}$ ein axiomatisierbares ω-konsistentes System ist, in dem alle wahren Σ_0-Sätze beweisbar sind, dann muss $\mathcal{S}$ unvollständig sein.

Theorem B.

Alle wahren Σ_0-Sätze sind beweisbar in P.A.

Theorem G. als Forgerung aus Theorem A. und Theorem B.

Theorem A.

Wenn $\mathcal{S}$ ein axiomatisierbares ω-konsistentes System ist, in dem alle wahren Σ_0-Sätze beweisbar sind, dann muss $\mathcal{S}$ unvollständig sein.

Theorem B.

Alle wahren Σ_0-Sätze sind beweisbar in P.A.

Begriff der Repräsentierbarkeit

Definition

Eine Formel $\mathcal{F}(v_1)$ mit einer einzigen freien Variable v_1 **repräsentiert** eine Zahlenmenge $\mathcal{A}$ in $\mathcal{S}$, wenn $\mathcal{A}$ aus solchen und nur aus solchen Nummern n besteht, so dass der Satz $\mathcal{F}(\overline{n})$ in $\mathcal{S}$ beweisbar ist.

Definition

Eine Formel $\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_k)$ **repräsentiert** eine Menge von k-Tupeln $(n_1, \ldots, n_k)$, wenn $\mathcal{F}(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)$ in $\mathcal{S}$ beweisbar ist.

Begriff der Repräsentierbarkeit

Definition

Eine Formel $\mathcal{F}(v_1)$ mit einer einzigen freien Variable v_1 **repräsentiert** eine Zahlenmenge $\mathcal{A}$ in $\mathcal{S}$, wenn $\mathcal{A}$ aus solchen und nur aus solchen Nummern n besteht, so dass der Satz $\mathcal{F}(\overline{n})$ in $\mathcal{S}$ beweisbar ist.

Definition

Eine Formel $\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_k)$ **repräsentiert** eine Menge von k-Tupeln $(n_1, \ldots, n_k)$, wenn $\mathcal{F}(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)$ in $\mathcal{S}$ beweisbar ist.

Repräsentierbarkeit vs. Ausdrückbarkeit

Definition

Eine Formel $\mathcal{F}(v_1)$ mit einer einzigen freien Variable v_1 **drückt** eine Zahlenmenge $\mathcal{A}$ in $\mathcal{S}$ **aus**, wenn $\mathcal{A}$ aus solchen und nur aus solchen Nummern n besteht, so dass der Satz $\mathcal{F}(\overline{n})$ in $\mathcal{S}$ wahr ist.

Beispiel

Sei $\mathcal{G}$ ein wahrer Satz, der in P.A. nicht beweisbar ist.
Sei $\mathcal{F}(v_1)$ eine Formel $\mathcal{G} \wedge (v_1 = v_1)$.
$\mathcal{F}(v_1)$ drückt $\mathbb{N}$ aus, aber repräsentiert nur noch $\varnothing$.

Repräsentierbarkeit vs. Ausdrückbarkeit

Definition

Eine Formel $\mathcal{F}(v_1)$ mit einer einzigen freien Variable v_1 **drückt** eine Zahlenmenge $\mathcal{A}$ in $\mathcal{S}$ **aus**, wenn $\mathcal{A}$ aus solchen und nur aus solchen Nummern n besteht, so dass der Satz $\mathcal{F}(\overline{n})$ in $\mathcal{S}$ wahr ist.

Beispiel

Sei $\mathcal{G}$ ein wahrer Satz, der in P.A. nicht beweisbar ist.
Sei $\mathcal{F}(v_1)$ eine Formel $\mathcal{G} \wedge (v_1 = v_1)$.
$\mathcal{F}(v_1)$ drückt $\mathbb{N}$ aus, aber repräsentiert nur noch $\varnothing$.

Allgemeine Überlegungen formuliert in ein Lemma

Lemma 1

Für jede Formel $\mathcal{H}(v_1)$ mit Gödelnummer h gilt:

1. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$.
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *widerlegbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \mathcal{H}[\overline{n}]$ ist wahr, wobei $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \forall v_1 (v_1 = \overline{n} \supset \mathcal{H}(v_1))$
2. ist ein Theorem, also auch beweisbar in $\mathcal{S}$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ beweisbar in $\mathcal{S}$
   $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ widerlegbar in $\mathcal{S}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
   $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$ □

Allgemeine Überlegungen formuliert in ein Lemma

Lemma 1

Für jede Formel $\mathcal{H}(v_1)$ mit Gödelnummer h gilt:

1. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$.
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *widerlegbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \mathcal{H}[\overline{n}]$ ist wahr, wobei $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \forall v_1(v_1 = \overline{n} \supset \mathcal{H}(v_1))$
2. ist ein Theorem, also auch beweisbar in $\mathcal{S}$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ beweisbar in $\mathcal{S}$
   $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ widerlegbar in $\mathcal{S}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
   $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$

Allgemeine Überlegungen formuliert in ein Lemma

Lemma 1

Für jede Formel $\mathcal{H}(v_1)$ mit Gödelnummer h gilt:

1. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$.
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *widerlegbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \mathcal{H}[\overline{n}]$ ist wahr, wobei $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \forall v_1(v_1 = \overline{n} \supset \mathcal{H}(v_1))$
2. ist ein Theorem, also auch beweisbar in $\mathcal{S}$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ beweisbar in $\mathcal{S}$
   $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ widerlegbar in $\mathcal{S}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
   $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$ □

Allgemeine Überlegungen formuliert in ein Lemma

Lemma 1

Für jede Formel $\mathcal{H}(v_1)$ mit Gödelnummer h gilt:

1. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$.
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *widerlegbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \mathcal{H}[\overline{n}]$ ist wahr, wobei $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \forall v_1(v_1 = \overline{n} \supset \mathcal{H}(v_1))$
2. ist ein Theorem, also auch beweisbar in $\mathcal{S}$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ beweisbar in $\mathcal{S}$
   $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ widerlegbar in $\mathcal{S}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
   $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$

Allgemeine Überlegungen formuliert in ein Lemma

Lemma 1

Für jede Formel $\mathcal{H}(v_1)$ mit Gödelnummer h gilt:

1. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$.
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *widerlegbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \mathcal{H}[\overline{n}]$ ist wahr, wobei $\mathcal{H}(\overline{n}) \equiv \forall v_1(v_1 = \overline{n} \supset \mathcal{H}(v_1))$
2. ist ein Theorem, also auch beweisbar in $\mathcal{S}$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ beweisbar in $\mathcal{S}$
   $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{n}]$ widerlegbar in $\mathcal{S}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
   $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{R}^*$ □

Theorem 1 für ein beliebiges (nicht unbedingt axiomatisierbares) System

Theorem 1

Sei $\mathcal{S}$ konsistent und $\mathcal{H}(v_1)$ eine Formel, deren Negation die Menge $\mathcal{P}^*$ in $\mathcal{S}$ repräsentiert.
Dann ist der Satz $\mathcal{H}(\overline{h})$ weder beweisbar noch widerlegbar in $\mathcal{S}$, wobei h die Gödelnummer von der Formel $\mathcal{H}(v_1)$ ist.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
3. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$ (Lemma 1)
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar und widerlegbar oder beides nicht
5. $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ unentscheidbar

Theorem 1 für ein beliebiges (nicht unbedingt axiomatisierbares) System

Theorem 1

Sei $\mathcal{S}$ konsistent und $\mathcal{H}(v_1)$ eine Formel, deren Negation die Menge $\mathcal{P}^*$ in $\mathcal{S}$ repräsentiert.
Dann ist der Satz $\mathcal{H}(\overline{h})$ weder beweisbar noch widerlegbar in $\mathcal{S}$, wobei h die Gödelnummer von der Formel $\mathcal{H}(v_1)$ ist.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
3. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$ (Lemma 1)
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar und widerlegbar oder beides nicht
5. $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ unentscheidbar □

Theorem 1 für ein beliebiges (nicht unbedingt axiomatisierbares) System

Theorem 1

Sei $\mathcal{S}$ konsistent und $\mathcal{H}(v_1)$ eine Formel, deren Negation die Menge $\mathcal{P}^*$ in $\mathcal{S}$ repräsentiert.
Dann ist der Satz $\mathcal{H}(\overline{h})$ weder beweisbar noch widerlegbar in $\mathcal{S}$, wobei h die Gödelnummer von der Formel $\mathcal{H}(v_1)$ ist.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
3. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$ (Lemma 1)
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar und widerlegbar oder beides nicht
5. $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ unentscheidbar □

Theorem 1 für ein beliebiges (nicht unbedingt axiomatisierbares) System

Theorem 1

Sei $\mathcal{S}$ konsistent und $\mathcal{H}(v_1)$ eine Formel, deren Negation die Menge $\mathcal{P}^*$ in $\mathcal{S}$ repräsentiert.
Dann ist der Satz $\mathcal{H}(\overline{h})$ weder beweisbar noch widerlegbar in $\mathcal{S}$, wobei h die Gödelnummer von der Formel $\mathcal{H}(v_1)$ ist.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
3. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$ (Lemma 1)
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar und widerlegbar oder beides nicht
5. $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ unentscheidbar $\square$

Theorem 1 für ein beliebiges (nicht unbedingt axiomatisierbares) System

Theorem 1

Sei $\mathcal{S}$ konsistent und $\mathcal{H}(v_1)$ eine Formel, deren Negation die Menge $\mathcal{P}^*$ in $\mathcal{S}$ repräsentiert.
Dann ist der Satz $\mathcal{H}(\overline{h})$ weder beweisbar noch widerlegbar in $\mathcal{S}$, wobei h die Gödelnummer von der Formel $\mathcal{H}(v_1)$ ist.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
3. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$ (Lemma 1)
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar und widerlegbar oder beides nicht
5. $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ unentscheidbar

□

Theorem 1 für ein beliebiges (nicht unbedingt axiomatisierbares) System

Theorem 1

Sei $\mathcal{S}$ konsistent und $\mathcal{H}(v_1)$ eine Formel, deren Negation die Menge $\mathcal{P}^*$ in $\mathcal{S}$ repräsentiert.
Dann ist der Satz $\mathcal{H}(\overline{h})$ weder beweisbar noch widerlegbar in $\mathcal{S}$, wobei h die Gödelnummer von der Formel $\mathcal{H}(v_1)$ ist.

Beweis.

1. $\mathcal{H}(\overline{n})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
2. $\mathcal{H}(\overline{h})$ widerlegbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$
3. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \mathcal{P}^*$ (Lemma 1)
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ beweisbar und widerlegbar oder beides nicht
5. $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ unentscheidbar $\square$

Frage zum Beweis

Wäre es möglich, statt einer Formel, deren Negation $\mathcal{P}^*$ repräsentiert, eine Formel, die $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ repräsentiert, zu nehmen?

1. *Diese Strategie ist sinnlos!*
2. *Denn angenommen:*
   $\mathcal{H}(v_1)$ repräsentiert $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ und h - Gödelnummer von $\mathcal{H}(v_1)$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ *beweisbar in* $S \leftrightarrow n \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $S \leftrightarrow h \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
5. $\leftrightarrow h \notin \mathcal{P}^* \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ *nicht beweisbar* $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ *nicht beweisbar*
6. *Widerspruch!*

Frage zum Beweis

Wäre es möglich, statt einer Formel, deren Negation $\mathcal{P}^*$ repräsentiert, eine Formel, die $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ repräsentiert, zu nehmen?

1. *Diese Strategie ist sinnlos!*
2. *Denn angenommen:* $\mathcal{H}(v_1)$ *repräsentiert* $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ *und h - Gödelnummer von* $\mathcal{H}(v_1)$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
5. $\leftrightarrow h \notin \mathcal{P}^* \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ *nicht beweisbar* $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ *nicht beweisbar*
6. *Widerspruch!*

Frage zum Beweis

Wäre es möglich, statt einer Formel, deren Negation $\mathcal{P}^*$ repräsentiert, eine Formel, die $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ repräsentiert, zu nehmen?

1. *Diese Strategie ist sinnlos!*
2. *Denn angenommen:*
   $\mathcal{H}(v_1)$ *repräsentiert* $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ *und h - Gödelnummer von* $\mathcal{H}(v_1)$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
5. $\leftrightarrow h \notin \mathcal{P}^* \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ *nicht beweisbar* $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ *nicht beweisbar*
6. *Widerspruch!*

Frage zum Beweis

Wäre es möglich, statt einer Formel, deren Negation $\mathcal{P}^*$ repräsentiert, eine Formel, die $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ repräsentiert, zu nehmen?

1. *Diese Strategie ist sinnlos!*
2. *Denn angenommen:*
   $\mathcal{H}(v_1)$ *repräsentiert* $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ *und h - Gödelnummer von* $\mathcal{H}(v_1)$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
5. $\leftrightarrow h \notin \mathcal{P}^* \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ *nicht beweisbar* $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ *nicht beweisbar*
6. *Widerspruch!*

Frage zum Beweis

Wäre es möglich, statt einer Formel, deren Negation $\mathcal{P}^*$ repräsentiert, eine Formel, die $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ repräsentiert, zu nehmen?

1. *Diese Strategie ist sinnlos!*
2. *Denn angenommen:*
   $\mathcal{H}(v_1)$ *repräsentiert* $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ *und h - Gödelnummer von* $\mathcal{H}(v_1)$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
5. $\leftrightarrow h \notin \mathcal{P}^* \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ *nicht beweisbar* $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ *nicht beweisbar*
6. *Widerspruch!*

Frage zum Beweis

Wäre es möglich, statt einer Formel, deren Negation $\mathcal{P}^*$ repräsentiert, eine Formel, die $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ repräsentiert, zu nehmen?

1. *Diese Strategie ist sinnlos!*
2. *Denn angenommen:*
   $\mathcal{H}(v_1)$ *repräsentiert* $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ *und h - Gödelnummer von* $\mathcal{H}(v_1)$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
5. $\leftrightarrow h \notin \mathcal{P}^* \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ *nicht beweisbar* $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ *nicht beweisbar*
6. *Widerspruch!*

Frage zum Beweis

Wäre es möglich, statt einer Formel, deren Negation $\mathcal{P}^*$ repräsentiert, eine Formel, die $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ repräsentiert, zu nehmen?

1. *Diese Strategie ist sinnlos!*
2. *Denn angenommen:*
   $\mathcal{H}(v_1)$ *repräsentiert* $\widetilde{\mathcal{P}^*}$ *und h - Gödelnummer von* $\mathcal{H}(v_1)$
3. $\mathcal{H}(\overline{n})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
4. $\mathcal{H}(\overline{h})$ *beweisbar in* $\mathcal{S} \leftrightarrow h \in \widetilde{\mathcal{P}^*}$
5. $\leftrightarrow h \notin \mathcal{P}^* \leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{h}]$ *nicht beweisbar* $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{h})$ *nicht beweisbar*
6. *Widerspruch!*

Korollar

Korollar

Wenn $\mathcal{P}^*$ in einem konsistenten System $\mathcal{S}$ repräsentierbar ist, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Beweis.

- $\mathcal{H}(v_1)$ repräsentiert $\mathcal{P}^*$ und k - Gödelnummer von $\sim \mathcal{H}(v_1)$
- $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
- $\mathcal{H}(\overline{k})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow k \in \mathcal{P}^*$
- $\leftrightarrow \sim \mathcal{H}[\overline{k}]$ beweisbar $\leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{k}]$ widerlegbar
- $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ widerlegbar
- da $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ unentscheidbar

$\square$

Korollar

Korollar

Wenn $\mathcal{P}^*$ in einem konsistenten System $\mathcal{S}$ repräsentierbar ist, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Beweis.

- $\mathcal{H}(v_1)$ repräsentiert $\mathcal{P}^*$ und k - Gödelnummer von $\sim \mathcal{H}(v_1)$
- $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
- $\mathcal{H}(\overline{k})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow k \in \mathcal{P}^*$
- $\leftrightarrow \sim \mathcal{H}[\overline{k}]$ beweisbar $\leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{k}]$ widerlegbar
- $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ widerlegbar
- da $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ unentscheidbar

$\square$

Korollar

Korollar

Wenn $\mathcal{P}^*$ in einem konsistenten System $\mathcal{S}$ repräsentierbar ist, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Beweis.

- $\mathcal{H}(v_1)$ repräsentiert $\mathcal{P}^*$ und k - Gödelnummer von $\sim \mathcal{H}(v_1)$
- $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
- $\mathcal{H}(\overline{k})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow k \in \mathcal{P}^*$
- $\leftrightarrow \sim \mathcal{H}[\overline{k}]$ beweisbar $\leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{k}]$ widerlegbar
- $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ widerlegbar
- da $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ unentscheidbar

$\square$

Korollar

Korollar

Wenn $\mathcal{P}^*$ in einem konsistenten System $\mathcal{S}$ repräsentierbar ist, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Beweis.

- $\mathcal{H}(v_1)$ repräsentiert $\mathcal{P}^*$ und k - Gödelnummer von $\sim \mathcal{H}(v_1)$
- $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
- $\mathcal{H}(\overline{k})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow k \in \mathcal{P}^*$
- $\leftrightarrow \sim \mathcal{H}[\overline{k}]$ beweisbar $\leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{k}]$ widerlegbar
- $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ widerlegbar
- da $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ unentscheidbar

$\square$

Korollar

Korollar

Wenn $\mathcal{P}^*$ in einem konsistenten System $\mathcal{S}$ repräsentierbar ist, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Beweis.

- $\mathcal{H}(v_1)$ repräsentiert $\mathcal{P}^*$ und k - Gödelnummer von $\sim \mathcal{H}(v_1)$
- $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
- $\mathcal{H}(\overline{k})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow k \in \mathcal{P}^*$
- $\leftrightarrow \sim \mathcal{H}[\overline{k}]$ beweisbar $\leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{k}]$ widerlegbar
- $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ widerlegbar
- da $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ unentscheidbar

□

Korollar

Korollar

Wenn $\mathcal{P}^*$ in einem konsistenten System $\mathcal{S}$ repräsentierbar ist, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Beweis.

- $\mathcal{H}(v_1)$ repräsentiert $\mathcal{P}^*$ und k - Gödelnummer von $\sim \mathcal{H}(v_1)$
- $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
- $\mathcal{H}(\overline{k})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow k \in \mathcal{P}^*$
- $\leftrightarrow \sim \mathcal{H}[\overline{k}]$ beweisbar $\leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{k}]$ widerlegbar
- $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ widerlegbar
- da $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ unentscheidbar

$\square$

Korollar

Korollar

Wenn $\mathcal{P}^*$ in einem konsistenten System $\mathcal{S}$ repräsentierbar ist, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Beweis.

- $\mathcal{H}(v_1)$ repräsentiert $\mathcal{P}^*$ und k - Gödelnummer von $\sim \mathcal{H}(v_1)$
- $\mathcal{H}(\overline{n})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow n \in \mathcal{P}^*$
- $\mathcal{H}(\overline{k})$ beweisbar in $\mathcal{S} \leftrightarrow k \in \mathcal{P}^*$
- $\leftrightarrow \sim \mathcal{H}[\overline{k}]$ beweisbar $\leftrightarrow \mathcal{H}[\overline{k}]$ widerlegbar
- $\leftrightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ widerlegbar
- da $\mathcal{S}$ konsistent $\rightarrow \mathcal{H}(\overline{k})$ unentscheidbar

$\square$

Der Dual von Theorem 1

Theorem 1°

Wenn $\mathcal{R}^*$ in einem konsistenten System $\mathcal{S}$ repräsentierbar ist, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Fragen?