Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Logik in der Informatik
Prof. M. Grohe
Vorlesung: Baumzerlegungen von Graphen und ihre algorithmischen Anwendungen, SS 2006

Übungsblatt 8 (15. 6. 2006)

Aufgabe 29: Zeigen Sie: Die Vereinigung zweier Wege kann beliebig große Baumweite haben (d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es Wege W_1^k, W_2^k so das $\mathrm{bw}(W_1^k \cup W_2^k) \geq k$).

Aufgabe 30:
Zeigen Sie: Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass für alle Graphen G mit $\mathrm{bw}(G) > k$ gilt:

$$G \text{ hat einen Minor } H \text{ mit } \mathrm{bw}(H) > k \text{ und } |V(H)| \leq g(k).$$

Tipp: Verwenden Sie den Minorensatz: Jede unter Minoren abgeschlossene Klasse von Graphen lässt sich durch endlich viele verbotene Minoren charakterisieren.

Aufgabe 31: Ein *Matroid* ist ein Paar $(A,\mathcal{U})$ bestehend aus einer endlichen Menge A und einem System $\mathcal{U}$ von Teilmengen von A, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

(U1) $\emptyset \in \mathcal{U}$,

(U2) Wenn $X \subseteq Y$ und $Y \in \mathcal{U}$, dann ist auch $X \in \mathcal{U}$,

(U3) Sind $X, Y \in \mathcal{U}$ und $|X| < |Y|$, dann gibt es ein Element $b \in Y - X$, so dass $X \cup \{b\} \in \mathcal{U}$.

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Sei A eine n-elementige Menge und $\mathcal{U}$ das System der höchstens m-elementigen Teilmengen von A. Zeigen Sie: $(A,\mathcal{U})$ ist ein Matroid.

b) Sei V ein Vektorraum und A eine endliche Teilmenge von V. Sei U die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von A. Zeigen Sie: (A, U) ist ein Matroid.

Aufgabe 32: Sei $M = (A,\mathcal{U})$ ein Matroid. Eine bezüglich Mengeninklusion maximale Menge X aus $\mathcal{U}$ heist *Basis* (von M). Zeigen Sie:

a) Für je zwei Basen X und Y von M gilt $|X| = |Y|$.

b) Sei $\mathcal{B}$ die Menge der Basen von M. Dann gilt:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

(B2) Wenn X und Y aus $\mathcal{B}$ sind und $a \in X - Y$, dann gibt es ein Element $b \in Y - X$, so dass $\big(X \setminus \{a\}\big) \cup \{b\} \in \mathcal{B}$ (‚Basisaustausch-Axiom‘).

Abgabe: Donnerstag, 22. Juni, vor der Übungsstunde