

Übungen zu  
Parametrische Algorithmen und Komplexitätstheorie  
Sommersemester 2005  
**Blatt 9**  
**Abgabe: 30.06.2005**

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Sei  $Y$  eine  $r$ -stellige Relationsvariable. Eine Formel  $\varphi(Y)$  der Logik erster Stufe heißt *beschränkt (bezüglich  $Y$ )*, falls alle Quantoren nur in der Form  $\exists y_1 \dots \exists y_r (Y y_1 \dots y_r \wedge \psi)$  (abgekürzt durch  $(\exists \vec{y} \in Y)\psi$ ) beziehungsweise  $\forall y_1 \dots \forall y_r (Y y_1 \dots y_r \rightarrow \psi)$  (abgekürzt durch  $(\forall \vec{y} \in Y)\psi$ ) in  $\varphi(Y)$  enthalten sind.

- (a) Zeigen Sie, dass  $p\text{-WD}_\varphi \in \text{W}[1]$  für jede beschränkte Formel  $\varphi(Y)$ .
- (b) Sei  $R$  ein binäres Relationssymbol und  $Y$  eine einstellige Relationsvariable. Zeigen Sie, dass für  $\varphi(Y) = (\forall y \in Y)(\forall z \in Y)Ryz$  das Problem  $p\text{-WD}_\varphi$  unter fpt-Reduktionen vollständig ist für  $\text{W}[1]$ .

**Aufgabe 2** (8 Punkte)

Gegeben sei ein Graph  $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$  mit  $G = [3]$  und  $E^{\mathcal{G}} = \{(1, 2), (1, 3)\}$ .

- (a) Wenden Sie die Konstruktion aus dem Beweis von Theorem 1.2. in Kapitel VII des Skripts auf die Formel  $\varphi_1(X) = ds(X) := \forall x \exists y (Xy \wedge (E^{\mathcal{G}}xy \vee x = y))$  und die Struktur  $\mathcal{G}$  an: Geben Sie für eine Instanz  $(\mathcal{G}, k)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  von  $p\text{-WD}_{\varphi_1}$  eine fpt-Reduktion auf eine Instanz  $(\alpha, k)$  von  $p\text{-WSAT}(\Gamma_{2,d})$  an, mit  $\alpha \in \Gamma_{2,d}$  und einem  $d \geq 1$ .
- (b) Wenden Sie obige Konstruktion aus dem Beweis von Theorem 1.2. in Kapitel VII auf die Formel  $\varphi_2(X) = vc(X) := \forall x \forall y (Exy \rightarrow (Xx \vee Xy))$  und die Struktur  $\mathcal{G}$  an: Gesucht ist nun ein  $\alpha \in \Gamma_{1,d}$  mit  $d \geq 1$  so, dass die Instanz  $(\mathcal{G}, k)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  von  $p\text{-WD}_{\varphi_2}$  durch eine fpt-Reduktion in eine Instanz  $(\alpha, k)$  von  $p\text{-WSAT}(\Gamma_{1,d})$  transformiert wird.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Verwenden Sie die im Beweis zu Lemma 1.5. in Kapitel VII des Skripts für gerades  $t$  angegebene Konstruktion, um für  $t = 3$  und die  $\Gamma_{3,1}$ -Formel  $[(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)] \wedge [(\neg x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_4)]$  eine Instanz von  $p$ -WSAT( $\Gamma_{3,1}^-$ ) zu bestimmen.

(Konstruieren Sie das Analogon zu der im Skript mit  $(\alpha' \wedge \beta)$  bezeichneten Formel. Das Anwenden des Distributivgesetzes, um eine Formel analog zu  $\alpha''$ ) zu erhalten, ist nicht erforderlich).

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Benutzen Sie die für gerades  $t$  im Beweis zu Lemma 1.6. in Kapitel VII des Skripts angegebene Konstruktion analog, um für  $t = 3$ , für die Formel  $\varphi = (((\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)) \vee [(\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4)]) \wedge (((\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)) \vee [(\neg x_4 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)])$  und eine Instanz  $(\varphi, k)$  von  $p$ -WSAT( $\Gamma_{3,2}^-$ ) mit  $k \in \mathbb{N}$  eine Reduktion auf  $p$ -WSAT( $\Gamma_{3,1}$ ) anzugeben.

(Konstruieren Sie wie für gerades  $t$  eine  $\alpha'$  entsprechende Formel.)