Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. M. Grohe

Übungen zu
Parametrische Algorithmen und Komplexitätstheorie

Sommersemester 2005

Blatt 8

Abgabe: 23.06.2005

Aufgabe 1 (5 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Parkettierungen, bei denen die Parkettelemente aus einer gegebenen Menge $\mathcal{T} \subseteq C^4$ gewählt werden können, wobei C eine Menge von Farben ist. Jedes Element von $\mathcal{T}$ ist also von der Form $(c_t, c_r, c_b, c_l) \in C^4$ (t steht für "top", r, b, l für "right", "bottom" und "left").
Eine $k \times k$-Parkettierung mit Elementen aus $\mathcal{T}$ ist dann eine Abbildung $f : [k] \times [k] \to \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft, dass

- für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq k-1$ gilt $f(i,j)_r = f(i,j+1)_l$ und
- für alle $1 \leq i \leq k-1$ und $1 \leq j \leq k$ gilt $f(i,j)_t = f(i+1,j)_b$.

Das zugehörige, parametrisierte Problem ist:

p-Square-Tiling	
Instanz:	Eine Menge $\mathcal{T}$ von möglichen Parkettelementen über einer Menge C von Farben und $k \in \mathbb{N}$.
Parameter:	k.
Problem:	Entscheide, ob eine $k \times k$-Parkettierung mit Elementen aus $\mathcal{T}$ existiert.

Beweisen Sie, dass p-Square-Tiling unter fpt-Reduktionen A[1]-vollständig ist.
Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis, dass das Problem A[1]-hart ist, eine Reduktion von p-Short-NSTM-Halt auf p-Square-Tiling.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es keinen Σ_1-Satz φ_k geben kann so, dass für alle Graphen $\mathcal{G}$ gilt:

$$\mathcal{G} \models \varphi_k \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ besitzt einen perfekten Code der Kardinalität k}$$

(Ein perfekter Code eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ von Knoten so, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge $B(v) \cap C$ mit $B(v) := \{w \in V \mid w = v \text{ oder } \{v, w\} \in E\}$ genau einen Knoten enthält.)

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass das folgende, parametrisierte Problem unter fpt-Reduktionen A[1]-vollständig ist:

p-Exact-Hitting-Set	
Instanz:	Ein Hypergraph $\mathcal{H} = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.
Parameter:	k.
Problem:	Entscheide, ob eine Menge $S \subseteq V$ der Kardinalität k existiert so, dass $\|S \cap e\| = 1$ für jede Kante $e \in E$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass das folgende, parametrisierte Problem unter fpt-Reduktionen A[1]-vollständig ist:

p-Short-Post-Correspondence	
Instanz:	Paare $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ von Zeichenketten über einem Alphabet Σ und $k \in \mathbb{N}$.
Parameter:	k.
Problem:	Entscheide, ob es Zahlen $i_1, \ldots, i_k \in [n]$ gibt so, dass $a_{i_1}^\frown a_{i_2}^\frown \ldots^\frown a_{i_k} = b_{i_1}^\frown b_{i_2}^\frown \ldots^\frown b_{i_k}$.

(Hier bezeichnet das Symbol "$^\frown$" die Konkatenation von Zeichenketten.)
Hinweis: Benutzen Sie die Maschinencharakterisierung der Klasse A[1] um zu zeigen, dass das gegebene Problem in A[1] enthalten ist. Reduzieren Sie das Problem p-Short-NSTM-Halt auf p-Short-Post-Correspondence um die Härte für A[1] zu beweisen (der Standardbeweis für die Unentscheidbarkeit des Post'schen Korrespondenzproblems läßt sich dabei entsprechend anpassen).