Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. M. Grohe

Übungen zu
Parametrische Algorithmen und Komplexitätstheorie

Sommersemester 2005

Blatt 7

Abgabe: 16.06.2005

Aufgabe 1 (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für jede Signatur τ, die mindestens ein zumindest binäres Relationssymbol enthält, die folgende Einschränkung des Problems p-HOM A[1]-vollständig ist:

Instanz:	τ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Parameter:	$\|\|\mathcal{A}\|\|$.
Problem:	Entscheide, ob ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass das in (a) betrachtete Problem A[1]-vollständig bleibt, falls es durch $|A|$ anstatt $||\mathcal{A}||$ parametrisiert wird.

(c) Zeigen Sie, dass auch die nachstehende Parametrisierung von HOM A[1]-vollständig ist:

Instanz:	Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Parameter:	$\|A\|$.
Problem:	Entscheide, ob ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ existiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das nachfolgende Problem unter fpt-Reduktionen A[1]-vollständig ist.

p-SET-PACKING

Instanz:	Eine Familie F von Mengen und $k \in \mathbb{N}$.
Parameter:	k.
Problem:	Entscheide, ob F mindestens k paarweise disjunkte Mengen enthält.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgende Parametrisierung des Homomorphismus'-Problems unter fpt-Reduktionen para-NP-vollständig ist:

Instanz:	Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Parameter:	$\|\|\mathcal{B}\|\|$.
Problem:	Entscheide, ob ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ existiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die nachstehende Parametrisierung des starken Homomorphismus'-Problems fixed-parameter tractable ist:

Instanz:	Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Parameter:	$\|\|\mathcal{B}\|\|$.
Problem:	Entscheide, ob ein starker Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ existiert.

Hinweis: Für gegebene τ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen zwei Elemente $a, a' \in A$ *äquivalent*, falls für alle r-stelligen Relationen $R \in \tau$, für alle $(a_1, \dots, a_r) \in A^r$ und alle $i \in [r]$ gilt, dass

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_r) \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_{i-1}, a', a_{i+1}, \dots, a_r) \in R^{\mathcal{A}}$$

Beweisen Sie, dass aus der Existenz eines starken Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und der Äquivalenz von a und a' folgt, dass ein starker Homomorphismus h von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ existiert mit $h(a) = h(a')$.
Weiter ist zu zeigen, dass für alle $a, a' \in A$ gilt: falls h ein starker Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist mit $h(a) = h(a')$, dann sind a und a' äquivalent.
Diese beiden Behauptungen lassen sich benutzen, um eine Kernelisierung anzugeben, die eine gegebene Instanz $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ auf eine Instanz $(\mathcal{A}', \mathcal{B})$ reduziert mit $|A'| \leq |B|$.