

Übungen zu  
Parametrische Algorithmen und Komplexitätstheorie  
Sommersemester 2005  
Blatt 6  
Abgabe: 09.06.2005

**Aufgabe 1** (3 Punkte)

Aussagenlogische Formeln können auch als Schaltkreise aufgefasst werden und lassen sich somit als  $\tau_{\text{Circ}}$ -Strukturen darstellen.

Betrachtet werden hier Formeln in konjunktiver Normalform (CNF). Zeigen Sie, dass ein  $\Sigma_3$ -Satz  $wsat\text{-}cnf_k$  existiert so, dass für jede eine CNF-Formel repräsentierende  $\tau_{\text{Circ}}$ -Struktur  $C$  gilt:

$$C \models wsat\text{-}cnf_k \quad \text{gdw.} \quad C \text{ ist } k\text{-erfüllbar.}$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass  $\Pi_1$ -Sätze unter der Bildung induzierter Substrukturen erhalten bleiben (falls also eine Struktur  $\mathcal{A}$  den  $\Pi_1$ -Satz  $\varphi$  erfüllt, dann erfüllen auch alle induzierten Substrukturen von  $\mathcal{A}$  die Formel  $\varphi$ ).
- (b) Zeigen Sie, dass  $\Sigma_1$ -Sätze unter starken Einbettungen erhalten bleiben.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

Definieren Sie einen Satz in der Logik zweiter Stufe, der aussagt, dass ein Graph einen Hamiltonkreis enthält.

**Aufgabe 4** (8 Punkte)

Eine *konjunktive Anfrage* (bzw. eine *positive, primitive Formel*) ist eine Formel in der Logik erster Stufe von der Form  $\exists x_1 \dots \exists x_m (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n)$ , wobei  $\psi_1, \dots, \psi_n$  Atome sind. Die Klasse aller konjunktiven Anfragen wird mit CQ (für conjunctive queries) bezeichnet.

Betrachtet werden hier im Folgenden zwei parametrisierte Varianten des Auswertungsproblems für konjunktive Anfragen.

- (a) Zeigen Sie, dass das nachstehende, parametrisierte Problem para-NP-vollständig unter fpt-Reduktionen ist:

$p$ -MC(CQ)-I

*Instanz:* Eine Struktur  $\mathcal{A}$  und eine Formel  $\varphi \in \text{CQ}$ .

*Parameter:*  $\|\mathcal{A}\|$ .

*Problem:* Entscheide, ob  $\varphi(\mathcal{A}) \neq \emptyset$

- (b) Zeigen Sie, dass das nachstehende, parametrisierte Problem A[1]-vollständig unter fpt-Reduktionen ist:

$p$ -MC(CQ)-II

*Instanz:* Eine Struktur  $\mathcal{A}$  und eine Formel  $\varphi \in \text{CQ}$ .

*Parameter:*  $|\varphi|$ .

*Problem:* Entscheide, ob  $\varphi(\mathcal{A}) \neq \emptyset$