Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. M. Grohe

Übungen zu
Parametrische Algorithmen und Komplexitätstheorie

Sommersemester 2005

Blatt 10

Abgabe: 07.07.2005

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben sei die MSO-Formel $\varphi := x \leq y \vee (P_b x \wedge Zx)$ über der Signatur τ_Σ.
Geben Sie gemäß der Konstruktion im Beweis zu Theorem 1.3. aus Kapitel X des Skripts einen NFA $\mathfrak{A}$ an so, dass $L(\mathfrak{A}) = L(\varphi)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Geben Sie eine MSO-Satz φ über der Signatur $\tau^2_{\{0,1\}}$ an so, dass φ die Baumsprache $L(\varphi)$ definiert, die aus allen $\{0,1\}$-Bäumen mit einer geraden Anzahl von mit 1 beschrifteten Knoten besteht.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass das nachfolgende, parametrisierte Problem fixed parameter tractable ist:

Instanz:	Ein Baum $\mathcal{T} \in \text{TREE}_{lob}$, eine MSO-Formel $\varphi(X_1, \dots, X_r)$ mit freien Mengenvariablen $X_1, \dots, X_r$ und $m \in \mathbb{N}$.
Parameter:	$\lvert\varphi\rvert$.
Problem:	Entscheide, ob Mengen $S_1, \dots, S_r \subseteq T$ mit $\sum_{i=1}^{r} \lvert S_i\rvert = m$ existieren so, dass $\mathcal{T} \models \varphi(S_1, \dots S_r)$

Hinweis:
Interpretieren Sie Tupel der Form $(\mathcal{T}, S_1, \dots, S_r)$, wobei $\mathcal{T}$ ein Σ-Baum ist und $S_1, \dots, S_r$ Mengen der Knoten von $\mathcal{T}$ sind, als $\Sigma \times \{0,1\}^r$-Bäume.
Sei $\varphi(X_1, \dots, X_r)$ die Eingabeformel. Ein möglicher fpt-Algorithmus berechnet zunächst den nichtdeterministischen Baumatomaten $\mathfrak{A}$ über dem Alphabet $\Sigma \times \{0,1\}^r$ so, dass für jeden Σ-Baum $\mathcal{T} = (T, E_1, E_2, \lambda)$ und alle $S_1, \dots, S_r \subset T$ gilt

$$\mathfrak{A} \text{ akzeptiert } (\mathcal{T}, S_1, \dots, S_r) \iff \mathcal{T} \models \varphi(S_1, \dots S_r).$$

Erweitern Sie diesen Automaten $\mathfrak{A}$ anschließend so, dass auch die zusätzliche Bedingung $\sum_{i=1}^{r} \lvert S_i\rvert = m$ überprüft werden kann.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle $h \geq 1$ eine Formel $num_h(x)$ der Größe $O(h^2)$ existiert so, dass für alle Bäume $\mathcal{T} = (T, E)$ und $t \in T$ gilt:

$$\mathcal{T} \models num_h(t) \iff \text{Der Teilbaum } \mathcal{T}_t \text{ ist isomorph zu } \mathcal{T}(n) \text{ für ein } n < \operatorname{tow}(h)$$