Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. M. Grohe

Übungen zu
Parametrische Algorithmen und Komplexitätstheorie

Sommersemester 2005
Blatt 1
Abgabe: 21.04.2005

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei folgende parametrisierte Version des Problems INDEPENDENT SET definiert:

p-deg-INDEPENDENT SET	
Instanz:	Ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.
Parameter:	$k + \deg(\mathcal{G})$.
Problem:	Entscheide, ob $\mathcal{G}$ eine unabhängige Menge der Größe k enthält.

Zeigen Sie, dass *p-deg*-INDEPENDENT SET fixed-parameter tractable ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Ein *Cover* für einen Hypergraphen $\mathcal{H} = (V, E)$ ist eine Menge $X \subseteq V$ mit der Eigenschaft, dass $|e \setminus X| \leq 1$ für alle $e \in E$. Falls $|e| \geq 2$ für alle $e \in E$, ist somit jedes Cover auch ein Hitting Set.
Zeigen Sie, dass das folgende Problem fixed-parameter tractable ist:

p-COVER	
Instanz:	Ein Hypergraph $\mathcal{H} = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.
Parameter:	k.
Problem:	Entscheide, ob $\mathcal{H}$ ein Cover bestehend aus maximal k Knoten enthält.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Für nachstehende Aufgabe sind die folgenden beiden Definitionen erforderlich (siehe auch Skript zur Vorlesung, Seite 15 und 16):
Definition: Sei Σ ein endliches Alphabet. Ein *NP-Optimierungsproblem* (über Σ) ist ein Tripel $O = (L, K, Z)$, wobei gilt

(1) L ist eine Funktion definiert auf Σ^*, so dass die Relation

$$\{(x, y) \mid x \in \Sigma^* \text{ und } y \in L(x)\}$$

in PTIME ist und $|y| \leq \text{poly}(|x|)$ für $x \in \Sigma^*$ und $y \in L(x)$. Für jede Instanz $x \in \Sigma^*$ werden die Elemente der Menge $L(x)$ als *Lösungen* für x bezeichnet.

(2) K ist eine in polynomialer Zeit berechenbare Funktion, die definiert ist auf $\{(x, y) \mid x \in \Sigma^*$ und $y \in L(x)\}$; die Werte von K sind positive, natürliche Zahlen.

(3) $Z \in \{\max, \min\}$

Falls $Z = \max$ (Z = min) handelt es sich um ein Maximierungsproblem (Minimierungsproblem). Die Funktion opt_O auf Σ^* ist definiert durch

$$\text{opt}_O(x) := Z\{K(x, y) \mid y \in L(x)\}$$

Eine Lösung $y \in L(x)$ für eine Instanz $x \in \Sigma^*$ ist *optimal*, falls $K(x, y) = \text{opt}_O(x)$. Das Ziel eines Optimierungsproblems O ist es, eine optimale Lösung für eine gegebene Instanz zu bestimmen.

Definition: Sei $O = (L, K, Z)$ ein NP-Optimimierungsproblem über dem Alphabet Σ. Die *Standardparametrisierung* von O ist dann das folgende parametrisierte Problem:

p-O	
Instanz:	$x \in \Sigma^*$ und $k \in \mathbb{N}$.
Parameter:	k.
Problem:	Entscheide, ob $\text{opt}_O(x) \geq k$ falls $Z = \max$ bzw. ob $\text{opt}_O(x) \leq k$ falls $Z = \min$.

Eine aussagenlogische Formel ist in *3-disjunktiver Normalform (3-DNF)*, falls sie von der Form $\bigvee_{i \in I}(\lambda_{i1} \wedge \lambda_{i2} \wedge \lambda_{i3})$ ist, wobei λ_{ij} Literale sind. Die Konjunktionen $(\lambda_{i1} \wedge \lambda_{i2} \wedge \lambda_{i3})$ heißen dann *Terme* dieser Formel.
Betrachtet werde das folgende Maximierungsproblem:

MAX-3-DNF-SAT	
Instanz:	Eine aussagenlogische Formel α in 3-DNF.
Lösungen:	Zuweisungen an die Variablen in α
Kosten:	1 + die Anzahl der erfüllten Terme.
Ziel:	max.

(a) Zeigen Sie, dass die Standardparametrisierung von MAX-3-DNF-SAT fixed-parameter tractable ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die erwartete Anzahl der durch eine zufällige Zuweisung erfüllten Terme mindestens $(1/8)m$ ist, wobei m die Gesamtzahl der Terme in der Eingabeformel bezeichnet. Folgern Sie daraus, dass für eine Formel mit $m \geq 8k$ eine Zuweisung existiert, die mindestens k Terme erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass unter der Annahme PTIME $\neq$ NP die folgende Parametrisierung von MAX-3-DNF-SAT nicht fixed-parameter tractable ist:

Instanz:	Eine aussagenlogische Formel α in 3-DNF, $k \in \mathbb{N}$.
Parameter:	k.
Problem:	Entscheide, ob eine Zuweisung existiert, die genau $k - 1$ Terme von α erfüllt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es NP-vollständig ist zu entscheiden, ob zu einer gegebenen Formel in 3-disjunktiver Normalform eine Zuweisung existiert, die keinen Term erfüllt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Problem p-deg-INDEPENDENT SET eine Kernelisierung besitzt, so dass der zugehörige Kernel einer Instanz (G, k) mit $d := \deg(G)$ die Größe $(d + 1) \cdot k$ hat.