

9. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 17.06.2005 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 22.06.2005

Aufgabe 1:

5 Punkte

Sei σ eine Signatur. Zeigen Sie, daß auf der Klasse der endlichen σ -Strukturen jede $L_{\infty\omega}$ -Formel äquivalent sowohl zu einer abzählbaren Vereinigung als auch einer abzählbaren Konjunktion von $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln ist.

Aufgabe 2:

5 Punkte

Zeigen Sie, daß die Klasse

- (a) $\text{EVEN}_{<} := \{ \mathfrak{A} := (A, <) : |A| \text{ gerade} \}$ innerhalb der Klasse aller linearen Ordnungen in $L_{\infty\omega}^2$ definierbar ist.
- (b) $\text{EVEN} := \{ \mathfrak{A} := (A, \emptyset) : \mathfrak{A} \text{ ist eine endliche } \{ \} \text{-Struktur mit } |A| \text{ gerade} \}$ *nicht* definierbar ist in der Logik $L_{\infty\omega}^\omega$.

Aufgabe 3:

5 Punkte

Für $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bezeichne \mathfrak{A}_ℓ den gerichteten Kreis auf ℓ Knoten, und \mathfrak{B}_ℓ bezeichne den Graph, der aus zwei disjunkten gerichteten Kreisen auf je ℓ Knoten besteht.

Was ist das maximale k , so daß Duplicator eine Gewinnstrategie im k -Pebble-Spiel $G_\infty^k(\mathfrak{A}_\ell, \mathfrak{B}_\ell)$ hat? Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für Duplicator im Spiel $G_\infty^k(\mathfrak{A}_\ell, \mathfrak{B}_\ell)$ sowie eine Gewinnstrategie für Spoiler im Spiel $G_\infty^{k+1}(\mathfrak{A}_\ell, \mathfrak{B}_\ell)$.

Aufgabe 4:

5 Punkte

Sei $\sigma := \{ <, \dots \}$ eine Signatur, so daß alle in σ vorkommenden Relationssymbole höchstens binär sind. Zeigen Sie, daß für alle endlichen, geordneten Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} gilt, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ genau dann, wenn Duplicator das Spiel $G_\infty^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.