

8. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 3.06.2005 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 08.06.2005

Aufgabe 1:

4 Punkte

Zeigen Sie, daß keine der folgenden Klassen von Graphen FO-axiomatisierbar ist:

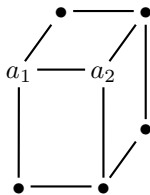
- (i) BAUM := $\{G : G \text{ ist ein ungerichteter, zusammenhängender, azyklischer Graph}\}$
- (ii) HAMILTON := $\{G : G \text{ ist ein gerichteter Graph, der einen Hamiltonpfad enthält}\}$
- (iii) EULER := $\{G : G \text{ ist ein ungerichteter Graph, der einen Eulerkreis enthält}\}$

Zur Erinnerung: Ein Hamiltonpfad ist ein Pfad durch einen Graphen, der jeden Knoten genau einmal enthält. Ein Eulerkreis ist ein Kreis, der jede Kante genau einmal durchläuft.

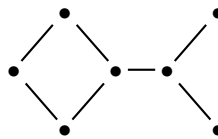
Aufgabe 2:

6 Punkte

Graph \mathcal{G} :



Graph \mathcal{H} :



- (i) Finden Sie $b_1, b_2 \in \mathcal{H}$, so daß $a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2 \in \text{Part}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.
- (ii) Was ist das größte m , so daß es $b_1, b_2 \in \mathcal{H}$ gibt mit $(\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$? Belegen Sie Ihre Aussage, indem Sie für ihr m Elemente $b_1, b_2 \in \mathcal{H}$ und ein Hin- und Her-System $(I_j)_{j \leq m} : (\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$ angeben.
- (iii) Erklären Sie, warum ein größeres als das von Ihnen angegebene m nicht möglich ist, indem Sie eine entsprechende Gewinnstrategie für Spieler I angeben.

Aufgabe 3:

5 Punkte

Beweisen Sie, daß jede reguläre Sprache durch einen Satz in LFP definierbar ist.

Hinweis: Jede reguläre Sprache ist durch einen deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ entscheidbar, wobei Q die Menge der Zustände, Σ das Alphabet und $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die Übergangsfunktion ist.

Aufgabe 4:

5 Punkte

Sei $\varphi := [\text{lfp}_{R, \bar{x}} \psi](\bar{t})$ eine Formel in LFP, wobei $\psi \in \text{FO}$. Zeigen Sie, daß es zu jeder Induktionsstufe R^i der Induktion über ψ eine Formel $\chi_i(\bar{x})$ in FO gibt, so daß für alle σ -Strukturen \mathfrak{A} und alle $\bar{a} \in A^k$ gilt: $\bar{a} \in R^i$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \chi_i[\bar{a}]$.