Institut für Informatik SoSe 2005
Humboldt-Universität zu Berlin

7. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 03.06.2005 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 08.06.2005

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Beweisen Sie die Richtung "$\Longrightarrow$" von Satz 3.11, d.h. zeigen Sie, dass für alle $m \geqslant 1$ und alle endlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}})$ gilt: Falls $|A| < |B|$ und $|A| < 2^m$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Es gibt keinen FO$[<, P_a, P_b]$-Satz, der die Sprache $L \subseteq \{a,b\}^*$ beschreibt, die aus genau den nicht-leeren Worten w besteht, in denen die Anzahl der in w vorkommenden as gerade ist.

(b) 2Col ist nicht FO-definierbar in UGraphs.

(c) Azyklisch ist nicht FO-definierbar in UGraphs.

Dabei sei UGraphs die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, 2Col die Klasse aller 2-färbbaren endlichen ungerichteten Graphen und Azyklisch die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, die keinen Kreis enthalten.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Sei σ eine Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen.

- Die Struktur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ ist die σ-Struktur mit Universum $A \times B$, Konstanten $c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}})$ (f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$) und Relationen $R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := \{\big((a_1,b_1),..,(a_r,b_r)\big) : (a_1,..,a_r) \in R^{\mathfrak{A}}$ und $(b_1,..,b_r) \in R^{\mathfrak{B}}\}$ (f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ mit $r := ar(R)$).
- Falls σ *relational* ist und A und B disjunkt sind, so ist $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ und Relationen $R^{\mathfrak{A}\sqcup\mathfrak{B}} := R^{\mathfrak{A}} \cup R^{\mathfrak{B}}$ (f.a. $R \in \sigma$).

Es sei $m \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ seien σ-Strukturen.
Nutzen Sie die EF-Spiel-Charakterisierung von $\equiv_m$, um folgendes zu zeigen:

(a) Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

(b) Falls σ relational ist und $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ und $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, so gilt:
Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \sqcup \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \sqcup \mathfrak{B}_2$.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Sei $\sigma := \{S_v, S_h\}$ mit zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h. Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k\times\ell)$-*Gitter* $\mathfrak{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1,..,k\} \times \{1,..,\ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathfrak{G}_{k,\ell}} &:= \{\big((i,j),(i{+}1,j)\big) \mid 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell\} \\ S_h^{\mathfrak{G}_{k,\ell}} &:= \{\big((i,j),(i,j{+}1)\big) \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es keinen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, so dass für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt:
$\mathfrak{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.