6. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 27.05.2005 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 01.06.2005

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $\sigma := \{R_1, R_2\}$ die Signatur, die aus einem 1-stelligen Relationssymbol R_1 und einem 3-stelligen Relationssymbol R_2 besteht und sei $\mathfrak{A}$ die σ-Struktur mit

$$A \ := \ \{a, b, c, d\}, \quad R_1^{\mathfrak{A}} \ := \ \{a, d\}, \quad R_2^{\mathfrak{A}} \ := \ \{\, (a, b, d),\ (b, c, c),\ (c, d, a)\,\}\,.$$

Skizzieren Sie den ungerichteten Graphen $G := \mathcal{I}(\mathfrak{A})$, der im Beweis von Satz 2.79 konstruiert wird, um die Struktur $\mathfrak{A}$ zu repräsentieren.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Problem ERREICHBARKEIT bezüglich DTC-Reduktionen vollständig ist für die Klasse NLOGSPACE.

Sie können dafür das Problem ERREICHBARKEIT mit der folgenden Klasse Reach identifizieren: Sei $\sigma := \{E, S, T\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E und zwei 1-stelligen Relationssymbolen S, T besteht. $\mathsf{RGraphs}$ sei die Klasse aller endlichen σ-Strukturen, und Reach sei die Klasse aller endlichen σ-Strukturen $G = (V, E^G, S^G, T^G)$, in denen es einen Pfad von einem Knoten aus S^G zu einem Knoten aus T^G gibt.

Um die Härte bzgl. DTC-Reduktionen nachzuweisen, zeigen Sie, dass für jede Signatur τ und jede Klasse C endlicher geordneter τ-Strukturen gilt: Falls $L_{\mathsf{C}} \in$ NLOGSPACE, dann gibt es eine DTC-Reduktion von $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}_1$ auf $\mathsf{Reach} \subseteq \mathsf{RGraphs}$. (Dabei bezeichnet S_1 die Klasse aller endlichen geordneten τ-Strukturen).

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Zeigen Sie: Jede endliche Struktur ist bis auf Isomorphie in der Logik erster Stufe definierbar, d.h. für jede Signatur σ und jede endliche σ-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt es einen FO$[\sigma]$-Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$, so dass für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gilt: $\quad \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\,.$

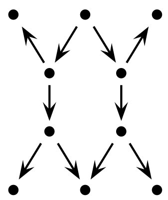
Aufgabe 4: (5 Punkte)

Betrachten Sie die auf der Rückseite dieses Blattes skizzierten Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

(a) Welches ist das kleinste k, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im k-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel hat? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(b) Finden Sie für Ihre Antwort k aus Teil (a) einen FO$[E]$-Satz ψ der Quantorentiefe k, so dass $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Graph $\mathfrak{A}$:



Graph $\mathfrak{B}$: