

5. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 20.05.2005 zu Beginn der Vorlesung

Übungstermin: Mittwoch, den 25.05.2005

Aufgabe 1:

(4 Punkte)

Konstruieren Sie posDTC[<]-Formeln $\varphi_{\text{Bit}=1}(x, y)$ und $\varphi_{\text{Bit}=0}(x, y)$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Struktur $\mathfrak{A}_n := (\{0, \dots, n\}, <)$ und alle Zahlen $a, i \in \{0, \dots, n\}$ gilt:

$$\mathfrak{A}_n \models \varphi_{\text{Bit}=1}[a, i] \iff \text{das } i\text{-te Bit der Zahl } a \text{ ist 1, d.h. } \lfloor \frac{a}{2^i} \rfloor \text{ ist ungerade,}$$

$$\mathfrak{A}_n \models \varphi_{\text{Bit}=0}[a, i] \iff \text{das } i\text{-te Bit der Zahl } a \text{ ist 0, d.h. } \lfloor \frac{a}{2^i} \rfloor \text{ ist gerade.}$$

Aufgabe 2:

(6 Punkte)

Arbeiten Sie die Details im Beweis von Theorem 2.64 aus, d.h. finden Sie zu einer gegebenen Logspace-beschränkten DTM M posDTC-Formeln $\varphi_{\text{Start}}(\vec{s})$, $\varphi_{\text{Akzeptiere}}(\vec{t})$ und $\varphi_{\text{Schritt}}(\vec{x}, \vec{y})$, die besagen, dass \vec{s} die Startkonfiguration von M bei Eingabe $\text{enc}(\mathfrak{A})$ ist, dass \vec{t} eine akzeptierende Endkonfiguration ist, und dass \vec{y} die Nachfolgekonfiguration von \vec{x} ist.

Sie können dabei davon ausgehen, dass die Überführungsrelation der DTM M durch eine Funktion

$$\delta : Q \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$$

gegeben ist, wobei $\delta(q, \gamma_1, \gamma_2) = (q', \gamma', m_1, m_2)$ besagt: Wenn die TM in Zustand q auf dem Eingabeband das Symbol γ_1 und auf dem Arbeitsband das Symbol γ_2 liest, dann geht sie in Zustand q' , schreibt das Symbol γ' auf das Arbeitsband, bewegt den Lesekopf des Eingabebands in Richtung m_1 und bewegt den Schreib-/Lesekopf des Arbeitsbands in Richtung m_2 .

Aufgabe 3:

(5 Punkte)

Sind \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 Logiken, so schreiben wir " $\mathcal{L}_1 \leq \mathcal{L}_2$ auf Fin", falls es für jede Signatur σ und jede $\mathcal{L}_1[\sigma]$ -Formel φ_1 eine $\mathcal{L}_2[\sigma]$ -Formel φ_2 gibt, die auf allen endlichen σ -Strukturen äquivalent zu φ_1 ist (d.h. $\text{frei}(\varphi_2) = \text{frei}(\varphi_1)$) und für jede endliche $(\sigma \cup \text{frei}(\varphi_1))$ -Struktur \mathfrak{A} gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi_1 \iff \mathfrak{A} \models \varphi_2$.

Zeigen Sie: (a) $\text{TC} \leq \text{LFP}$ auf Fin, (b) $\text{LFP} \leq \text{SO}$ auf Fin, (c) $\text{LFP} \leq \text{ESO}$ auf Fin.

Aufgabe 4:

(5 Punkte)

Betrachten Sie die FO[E]-Formel $\varphi(R, x) := \forall y (E(x, y) \rightarrow R(y))$.

(a) Ist $F_{\varphi, G}$ monoton für jeden Graphen $G = (V^G, E^G)$?

(b) Beschreiben Sie die durch φ induzierten Induktionsstufen, d.h. geben Sie für alle $i \in \mathbb{N}$ ein allgemeines Kriterium für Knoten v eines Graphen G an, in der Induktionsstufe $R^i := F_{\varphi, G^i}(\emptyset)$ enthalten zu sein.

(c) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ an, für den jede Induktionsstufe die leere Menge ist, und einen Graphen $G' = (V', E')$ mit $|V'| = n$, für den R^∞ sämtliche Knoten von G' enthält.