Institut für Informatik SoSe 2005
Humboldt-Universität zu Berlin

4. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 13.05.2005 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 18.05.2005

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Beweisen Sie Korollar 2.12, d.h. zeigen Sie:

Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: Σ^1_k beschreibt Σ^p_k auf Fin.

Folgern Sie anschließend daraus, dass Π^1_k die Klasse Π^p_k (für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$) auf Fin beschreibt und dass SO die Polynomialzeithierarchie PH auf Fin beschreibt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $\sigma := \{<, P_a, P_b, P_c\}$ die Signatur, um Worte w über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$ durch σ-Strukturen $\mathfrak{A}_w$ zu beschreiben (vgl. Blatt 1 / Aufgabe 2). Geben Sie

(a) einen IFP[σ]-Satz ψ_1 und

(b) einen LFP[σ]-Satz ψ_2

an, der die Sprache $L := \{w \mid w \text{ ist von der Form } vcv \text{ für ein } v \in \{a,b\}^*\}$ beschreibt. Es soll also für alle nicht-leeren Worte $w \in \{a,b,c\}^*$ gelten: $\mathfrak{A}_w \models \psi_1 \iff w \in L \iff \mathfrak{A}_w \models \psi_2$. Begründen Sie jeweils kurz, warum Ihre Formeln das Gewünschte besagen.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Zeigen Sie

(a) mit

(b) ohne

Rückgriff auf komplexitätstheoretische Sachverhalte, dass auf der Klasse aller endlichen geordneten Strukturen jede SO-Formel äquivalent zu einer PFP-Formel ist (kurz: SO $\leqslant$ PFP auf FinOrd).

Hinweis: Benutzen Sie für (b) die Konstruktion aus Beispiel 2.41 und beachten Sie, dass jede SO-Formel der Form $\forall X \varphi$ äquivalent zur SO-Formel $\neg\exists X \neg\varphi$ ist.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Beweisen Sie Theorem 2.47, d.h. zeigen Sie:
PFP beschreibt PSPACE auf der Klasse aller endlichen geordneten Strukturen.