

3. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 06.05.2005 zu Beginn der Vorlesung

Übungstermin: Mittwoch, den 11.05.2005

Aufgabe 1:

(5 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Für jede Signatur σ , die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, ist das folgende Problem *nicht semi-entscheidbar*:

ALLGEMEINGÜLTIGKEIT AUF Fin:

Eingabe: Ein FO[σ]-Satz φ .

Frage: Gilt für alle *endlichen* σ -Strukturen \mathfrak{A} , dass $\mathfrak{A} \models \varphi$?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trachtenbrot.

Aufgabe 2:

(5 Punkte)

Ein Graph G heißt *k-färbbar*, für $k \in \mathbb{N}$, falls die Knoten des Graphen so mit Farben C_1, \dots, C_k gefärbt werden können, dass jeder Knoten genau eine Farbe und je zwei benachbarte Knoten verschiedene Farben erhalten.

G heißt *zusammenhängend*, falls es zu je zwei Knoten $u, v \in V$ einen Pfad von u nach v gibt.

- Geben Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen ESO-Satz Φ_k an, der genau dann in einem Graphen G gilt, wenn dieser k -färbbar ist.
- Geben Sie einen ESO-Satz Φ_f an, so dass für jeden Graphen G gilt: $G \models \Phi_f$ genau dann, wenn G k -färbbar ist für ein $k < |V|$. G kann also mit *weniger* Farben gefärbt werden, als es Knoten gibt.
- Geben Sie einen ESO-Satz Ψ an, so dass für jeden Graphen G gilt: $G \models \Psi$ genau dann, wenn G zusammenhängend ist.

Geben Sie zu Ihren Formeln jeweils auch kurze Begründungen an, warum sie das gewünschte besagen.

Aufgabe 3:

(5 Punkte)

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (kurz: NFA) ist ein Tupel $M = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, F)$, wobei Σ das Eingabealphabet, Q die Zustandsmenge, q_0 der Startzustand, $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände und $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die Überführungsrelation ist. " $(q, a, q') \in \Delta$ " bedeutet, dass der NFA im Zustand q beim Lesen des Symbols a in den Zustand q' übergehen kann und dann seinen Kopf um eine Stelle nach rechts bewegt.

Zeigen Sie, dass es für jeden NFA M über dem Eingabealphabet $\Sigma := \{a, b\}$ einen ESO[$<, P_a, P_b$]-Satz gibt, der nur Relationsvariablen der Stelligkeit 1 benutzt und der die Menge aller von M akzeptierten Worte beschreibt (im Sinne von Blatt 1/Aufgabe 2).

Aufgabe 4:

(5 Punkte)

Sei A eine Menge und $F : \text{Pot}(A) \rightarrow \text{Pot}(A)$ eine Abbildung. In der Vorlesung wurde definiert, wann eine solche Abbildung *monoton*, *inflationär* oder *induktiv* ist.

Geben Sie eine Menge A und für jeden der Begriffe *monoton* und *inflationär* eine Abbildung $F : \text{Pot}(A) \rightarrow \text{Pot}(A)$ an, die die eine aber nicht die andere Eigenschaft hat. Geben Sie ferner eine Abbildung an, die weder *monoton* noch *inflationär* noch *induktiv* ist.