

2. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 29.04.2005 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 04.05.2005

Aufgabe 1:

(6 Punkte)

Seien $r, s \in \mathbb{N}$, und sei σ eine Signatur und R ein r -stelliges Relationssymbol, das *nicht* in σ liegt.

Definition (Monotonie): Eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_s) \in \text{FO}[\sigma \dot{\cup} \{R\}]$ heißt *monoton in R auf Fin*, wenn für alle endlichen σ -Strukturen \mathfrak{A} und alle Relationen $R_1^{\mathfrak{A}}, R_2^{\mathfrak{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls } R_1^{\mathfrak{A}} \subseteq R_2^{\mathfrak{A}}, \text{ so } \varphi(\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}}) \subseteq \varphi(\mathfrak{A}, R_2^{\mathfrak{A}}),$$

wobei $\varphi(\mathfrak{A}, R_i^{\mathfrak{A}}) := \{\vec{a} \in A^s \mid (\mathfrak{A}, R_i^{\mathfrak{A}}) \models \varphi[\vec{a}]\}$.

Aufgabe: Beweisen Sie, dass das Problem

MONOTONIE:

Eingabe: Eine $\text{FO}[\sigma \dot{\cup} \{R\}]$ -Formel $\varphi(x_1, \dots, x_s)$.

Frage: Ist $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ monoton in R auf Fin?

unentscheidbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trachtenbrot.

Aufgabe 2:

(6 Punkte)

Konstruieren Sie für jedes $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r) \in \text{FO}[\{<\}]$, die auf endlichen linearen Ordnungen $(A, <)$ folgende Eigenschaften formalisieren:

- (a) $\vec{x} <_{\text{lex}} \vec{y}$.
- (b) \vec{y} ist der unmittelbare Nachfolger von \vec{x} bzgl. $<_{\text{lex}}$ (kurz: $\text{succ}_{<_{\text{lex}}}(\vec{x}, \vec{y})$).
- (c) \vec{y} ist der unmittelbare Vorgänger von \vec{x} bzgl. $<_{\text{lex}}$ (kurz: $\text{pred}_{<_{\text{lex}}}(\vec{x}, \vec{y})$).
- (d) \vec{x} ist das *maximale* Tupel bzgl. $<_{\text{lex}}$ (kurz: $\text{max}_{<_{\text{lex}}}(\vec{x})$).
- (e) \vec{x} ist das *minimale* Tupel bzgl. $<_{\text{lex}}$ (kurz: $\text{min}_{<_{\text{lex}}}(\vec{x})$).

Aufgabe 3:

(3 Punkte)

Seien $r, s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq s \leq r$. Geben Sie eine $\text{FO}[\{<\}]$ -Formel $\varphi(x_1, \dots, x_r)$ an, so dass für alle endlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} := (A, <)$ und alle r -Tupel $\vec{a} := (a_1, \dots, a_r) \in A^r$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{gdw.} \quad \text{rg}_{<_{\text{lex}}}(\vec{a}) < n^s,$$

wobei $n := |A|$ die Anzahl der Elemente im Universum von \mathfrak{A} bezeichnet.

Aufgabe 4:

(5 Punkte)

Sei $\sigma := \{R_1, \dots, R_k\}$ eine relationale Signatur, wobei R_i Relationssymbol der Stelligkeit $r_i := ar(R_i)$ sei (für alle $i \leq k$).

Sei $\mathfrak{A} := (A, R_1^{\mathfrak{A}}, \dots, R_k^{\mathfrak{A}})$ eine σ -Struktur und sei $B \subseteq A$ eine Teilmenge des Universums von \mathfrak{A} . Dann ist

$$\mathfrak{A}|_B := (B, R_1^{\mathfrak{A}} \cap B^{r_1}, \dots, R_k^{\mathfrak{A}} \cap B^{r_k})$$

die von B induzierte *Substruktur* von \mathfrak{A} .

Für jede FO[σ]-Formel ψ und jedes einstellige Relationssymbol U sei $\psi^{(U)}$ die Relativierung von ψ auf U , welche aus ψ konstruiert wird, indem rekursiv jede Teilformel der Form $\exists x\varphi$ durch die Formel $\exists x(U(x) \wedge \varphi)$ und jede Teilformel der Form $\forall x\varphi$ durch die Formel $\forall x(U(x) \rightarrow \varphi)$ ersetzt wird.

Aufgabe: Beweisen Sie das so genannte *Relativierungslemma*, das besagt, dass für jeden FO[σ]-Satz ψ , jede σ -Struktur \mathfrak{A} und jede Menge $U^{\mathfrak{A}} \subseteq A$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}) \models \psi^{(U)} \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{A}|_{U^{\mathfrak{A}}} \models \psi.$$