Institut für Informatik SS 2005
Humboldt-Universität zu Berlin

10. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 24.06.2005 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 29.06.2005

Aufgabe 1: 3 Punkte

Sei $m \geqslant 1$ und $r_1, \dots, r_m \geqslant 0$. Seien ferner A eine Menge und für alle $1 \leqslant i \leqslant j$,

$$F_i : A^{r_1} \times \cdots \times A^{r_m} \longrightarrow A^{r_i}$$

Abbildungen. Zeigen Sie folgende Behauptung: Sind alle F_i komponentenweise monoton, d.h. gilt für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ und alle $R_1 \subseteq A^{r_1}, \dots, R_m \subseteq A^{r_m}$ sowie $R'_j \supseteq R_j$,

$$F_i(R_1, \dots, R_m) \subseteq F_i(R_1, \dots, R_{j-1}, R'_j, R_{j+1}, \dots, R_m),$$

so ist $\bar{F} := (F_1, \dots, F_m)$ monoton.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Zeigen Sie, daß jede reguläre Sprache durch einen Satz in der monadischen simultanen kleinsten Fixpunktlogik definierbar ist.

Aufgabe 3: 5 Punkte

In der Vorlesung wurde bewiesen, daß simultane Fixpunkte in LFP durch geschachtelte einfache Fixpunkte ersetzt werden können. Zeigen Sie, daß die dabei gemachte Voraussetzung, daß die Formeln parameter-frei sind, notwendig ist. Geben Sie dazu ein Beispiel für eine simultane LFP-Formel φ mit Parametern an, so daß die aus dem Lemma entstehende Formel ohne simultane Fixpunkte nicht zu φ äquivalent ist.

Aufgabe 4: 8 Punkte

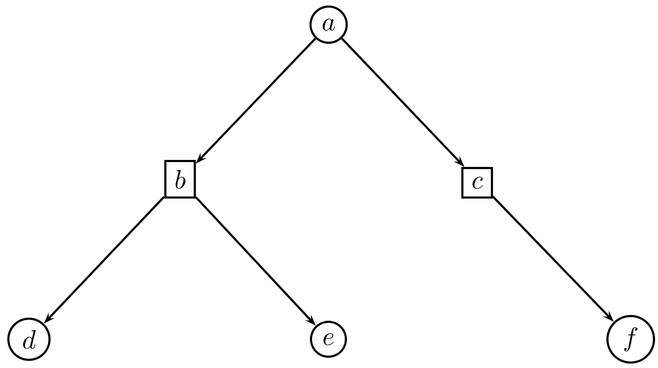
Sei (V, E) ein gerichteter endlicher Baum und r seine Wurzel. Seien ferner $V_0, V_1 \subseteq V$ Mengen, so daß $V = V_0 \cup V_1$ und $V_0 \cap V_1 = \varnothing$. Man nennt $\mathcal{T} := (V, V_0, V_1, E, r)$ einen Spielbaum.

Auf Spielbäumen dieser Art spielen zwei Spieler, genannt Spieler 0 und Spieler 1, ein Spiel nach folgenden Regeln. Zu Beginn des Spiel liegt ein Spielstein auf der Wurzel des Baumes. In jedem Zug schiebt einer der beiden Spieler den Stein entlang einer Kante zu einem Nachfolgeknoten der aktuellen Position. Dabei zieht Spieler 0, wenn der aktuelle Knoten in V_0 liegt, ansonsten zieht Spieler 1.

Liegt der Stein auf einem Blatt, d.h. kann ein Spieler nicht ziehen, so hat er verloren. Ziel des Spielers i ist es also, so zu ziehen, daß am Ende der Partie der Stein auf einem Blatt in der Menge V_{1-i} liegt.

Wir sagen, daß ein Spieler das Spiel auf $\mathcal{T}$ gewinnt, wenn er jede Partie gewinnen kann, also eine Gewinnstrategie hat.

- Welcher der beiden Spieler gewinnt folgendes Spiel? Hierbei bezeichnen Kreise die Positionen für Spieler 0 und Kästen die Positionen für Spieler 1.



- Geben Sie einen Algorithmus an, der bei Eingabe eines Spielbaums entscheidet, welcher der beiden Spieler eine Gewinnstrategie von der Wurzel aus hat.

- Geben Sie eine Formel $\varphi(x) \in$ LFP an, so daß für alle Spielbäume $\mathcal{T}$ und alle Knoten $v \in V$ gilt: $\mathcal{T} \models \varphi[v]$ genau dann, wenn Spieler 0 das Spiel vom Knoten v aus gewinnt.