

**1. Übung Logik und Komplexität**

Abgabe: Freitag, den 22.04.2005 zu Beginn der Vorlesung

Übungstermin: Mittwoch, den 27.04.2005

**Aufgabe 1:**

(5 Punkte)

Finden Sie FO-Formeln, die die folgenden Anfragen an die in Kapitel 0 der Vorlesung benutzte Bibliotheks-Datenbank beschreiben:

- (a) Alle Autoren, die bei (mindestens) einer der Konferenzen LICS bzw. STOC veröffentlicht haben.
- (b) Alle Tupel aus Autor und Jahr, für die der Autor im jeweiligen Jahr einen Artikel bei der Konferenz STACS hatte, in dem er keine Koautoren hatte.

**Aufgabe 2:**

(7 Punkte)

Sei  $\sigma = \{<, P_a, P_b\}$  die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol  $<$  sowie zwei 1-stelligen Relationssymbolen  $P_a$  und  $P_b$  besteht.

Einem endlichen Wort  $w = w_0 \cdots w_{n-1}$  der Länge  $n \geq 1$  über dem Alphabet  $\Sigma := \{a, b\}$  ordnen wir die folgende  $\sigma$ -Struktur  $\mathfrak{A}_w = (A_w, <^{\mathfrak{A}_w}, P_a^{\mathfrak{A}_w}, P_b^{\mathfrak{A}_w})$  zu:

- $A_w := \{0, \dots, n-1\}$ ,
- $<^{\mathfrak{A}_w}$  ist die natürliche lineare Ordnung auf  $\{0, \dots, n-1\}$ ,
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{i \in A_w : w_i = a\}$ ,
- $P_b^{\mathfrak{A}_w} := \{i \in A_w : w_i = b\}$ .

Ein FO[ $\sigma$ ]-Satz  $\varphi$  beschreibt eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$ , falls für jedes nicht-leere Wort  $w \in \Sigma^*$  gilt:  $w \in L \iff \mathfrak{A}_w \models \varphi$ . (D.h.:  $\varphi$  beschreibt  $L \iff \text{Mod}_{\{\mathfrak{A}_w \mid w \in \Sigma^+\}}(\varphi) = \{\mathfrak{A}_w \mid w \in L\}$ .)

- (a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO[ $\sigma$ ]-Satz  $\varphi_0$ ?

$$\varphi_0 := \exists x \exists y \left( x < y \wedge \forall z \left( (z < x \wedge P_a(z)) \vee (P_b(z) \wedge (y = z \vee y < z)) \right) \right)$$

- (b) Geben Sie einen FO[ $\sigma$ ]-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck  $a(a|b)^*bb(a|b)^*$  definierte Sprache beschreibt.
- (c) Können Sie auch einen FO[ $\sigma$ ]-Satz finden, der die Sprache aller Worte beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden  $as$  gerade ist?  
Falls ja, geben Sie den Satz an; falls nein, versuchen Sie zu erklären, warum es keinen solchen Satz zu geben scheint.

**Aufgabe 3:**

(8 Punkte)

Beweisen Sie, dass für jede monoton wachsende Funktion  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt:

$$\text{NTIME}(T) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(T)}).$$