Lehrstuhl Logik in der Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

SoSe 2004

10. Übung Logik und Komplexität
Abgabe: Montag, 28.06.2004
Übungstermin: Mittwoch, 30.06.2004

Aufgabe 1:

6 Punkte

$\mathfrak{A}$ sei der Graph mit Knotenmenge $A = \{0, 1, 2, 3\}$ und Kantenmenge

$$E^{\mathfrak{A}} = \{(0,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,2)\}\,,$$

und $\mathfrak{B}$ sei der Graph mit Knotenmenge $B = \{a, b, c, d, e\}$ und Kantenmenge

$$E^{\mathfrak{B}} = \{(a,b), (b,c), (b,d), (b,e), (c,d), (d,c), (d,e), (e,d), (c,e), (e,c)\}\,.$$

(a) Berechnen Sie die 2-Invariante $\mathfrak{A}/2$ von $\mathfrak{A}$ und geben Sie eine graphische Darstellung der Struktur $\mathfrak{A}/2$.

(b) Berechnen Sie die 2-Invariante $\mathfrak{B}/2$ von $\mathfrak{B}$ und geben Sie eine graphische Darstellung der Struktur $\mathfrak{B}/2$.

(c) Entscheiden Sie anhand der 2-Invarianten $\mathfrak{A}/2$ und $\mathfrak{B}/2$, ob $\mathfrak{A} \equiv^{L^2_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$.

Aufgabe 2:

8 Punkte

Weisen Sie die LFP-Definierbarkeit der Relation $\sim^k$ aus Definition 4.23 nach, d.h., zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und jede relationale Signatur σ gibt es eine $\mathsf{LFP}[\sigma]$-Formel $\varphi_{\not\sim^k}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, alle $\overline{a} \in A^k$ und alle $\overline{b} \in A^k$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\not\sim^k}[\overline{a}, \overline{b}] \quad \iff \quad \begin{array}{l} \textit{nicht } \overline{a} \sim^k \overline{b}, \text{ d.h.:} \\ \overline{a} \text{ und } \overline{b} \text{ erfüllen } \textit{nicht} \text{ dieselben } L^k_{\infty\omega}\text{-Formeln in } \mathfrak{A}. \end{array}$$

Hinweis: Für $j \in \mathbb{N}$ sei M^j die Menge aller Tupel $(\overline{a}, \overline{b}) \in A^{2k}$, für die Spoiler eine Gewinnstrategie in $PG^k_\infty(\mathfrak{A}, \overline{a}, \mathfrak{A}, \overline{b})$ hat, mit der er nach höchstens j Runden gewonnen hat. Finden Sie eine *FO*-Formel $\psi(Z, \overline{x}, \overline{y})$, so dass f.a. $j \in \mathbb{N}$ gilt: die $(j+1)$-te Stufe R^{j+1} der Induktion über ψ in $\mathfrak{A}$ ist genau die Menge M^j. Nutzen Sie Theorem 4.18, um zu zeigen, dass die Formel $\varphi_{\not\sim^k}(\overline{x}, \overline{y}) := [\mathsf{lfp}_{Z,\overline{x},\overline{y}}\ \psi]\,(\overline{x}, \overline{y})$ die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 3:

6 Punkte

Zeigen Sie, dass die LFP-Formel $\Phi :=$

$$\forall x\ \forall y\ \Big[\mathsf{lfp}_{Y,y}\,\big(y{=}x \lor \exists x\ (Yx \land Exy)\big)\Big](y)$$

zu einer $L^3_{\infty\omega}$-Formel, aber *nicht* zu einer $L^2_{\infty\omega}$-Formel äquivalent ist.

Hinweis: Für die Nicht-Ausdrückbarkeit in $L^2_{\infty\omega}$ können Sie Aufgabe 3 von Blatt 9 benutzen.