

9. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Montag, 21.06.2004

Übungstermin: Mittwoch, 23.06.2004

Aufgabe 1:

5 Punkte

Zeigen Sie, dass die Klasse

$$\text{AZYKLISCH} := \{ G : G \text{ ist ein gerichteter Graph, der keinen Kreis enthält} \}$$

nicht in monadischem Σ_1^1 definierbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie das Ajtai-Fagin Spiel und lassen Sie Duplicator in Phase 1 einen Graph wählen, der aus einem einzigen gerichteten, hinreichend langen Pfad besteht.

Aufgabe 2:

5 Punkte

Für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\mathfrak{G}_{m,n}$ das in Aufgabe 3 von Blatt 8 definierte $(m \times n)$ -Gitter. Sei *Diag* die Anfrage, die jedem Gitter $\mathfrak{G}_{m,n}$ die Diagonale

$$\text{Diag}(\mathfrak{G}_{m,n}) := \{(i, i) : 1 \leq i \leq \min(m, n)\}$$

zuordnet. Zeigen Sie:

- (a) Die Anfrage *Diag* ist nicht FO-definierbar.
- (b) Die Anfrage *Diag* ist definierbar in monadischem Σ_1^1 .

Aufgabe 3:

5 Punkte

Für $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ bezeichne \mathfrak{A}_ℓ den gerichteten Kreis auf ℓ Knoten, und \mathfrak{B}_ℓ bezeichne den Graph, der aus zwei disjunkten gerichteten Kreisen auf je ℓ Knoten besteht.

Finden Sie die maximale Zahl k , so dass Duplicator eine Gewinnstrategie im k -Pebble-Spiel $PG_\infty^k(\mathfrak{A}_\ell, \mathfrak{B}_\ell)$ hat, und beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für Duplicator im Spiel $PG_\infty^k(\mathfrak{A}_\ell, \mathfrak{B}_\ell)$ sowie eine Gewinnstrategie für Spoiler im Spiel $PG_\infty^{k+1}(\mathfrak{A}_\ell, \mathfrak{B}_\ell)$.

Aufgabe 4:

5 Punkte

Sei $\sigma := \{R\}$, wobei R ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Zeigen Sie, dass

- (a) die Klasse $\text{EVEN}_< :=$

$$\{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ endliche } \sigma\text{-Struktur mit } |A| \text{ gerade und } R^{\mathfrak{A}} \text{ eine lineare Ordnung auf } A \}$$

in der Logik $L_{\infty\omega}^2$ definierbar ist.

- (b) die Klasse $\text{EVEN} := \{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ endliche } \sigma\text{-Struktur mit } |A| \text{ gerade} \}$ nicht definierbar ist in der Logik $L_{\infty\omega}^\omega$.