

8. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Montag, 14.06.2004

Übungstermin: Mittwoch, 16.06.2004

Aufgabe 1:

5 Punkte

Beweisen Sie Lemma 3.25 der Vorlesung.

Aufgabe 2:

5 Punkte

Sei σ eine Signatur und seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zwei σ -Strukturen.

- Die Struktur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ ist die σ -Struktur mit Universum $A \times B$, Konstanten $c^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}})$ (f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$) und Relationen $R^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} := \{((a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)) : (a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ und } (b_1, \dots, b_r) \in R^{\mathfrak{B}}\}$ (f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ mit $r := ar(R)$).
- Falls σ relational ist und A und B disjunkt sind, so ist $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ die σ -Struktur mit Universum $A \cup B$ und Relationen $R^{\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}} := R^{\mathfrak{A}} \cup R^{\mathfrak{B}}$ (f.a. $R \in \sigma$).

Es sei $k \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ seien σ -Strukturen. Zeigen Sie folgendes:

- (a) Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_k \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_k \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_k \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.
- (b) Falls σ relational ist und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, so gilt:
Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_k \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_k \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \sqcup \mathfrak{A}_2 \equiv_k \mathfrak{B}_1 \sqcup \mathfrak{B}_2$.

Aufgabe 3:

5 Punkte

Sei $\sigma := \{S_v, S_h\}$ mit zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h . Für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist das $m \times n$ -Gitter $\mathfrak{G}_{m,n}$ die σ -Struktur mit Universum $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathfrak{G}_{m,n}} &:= \{((i, j), (i+1, j)) : 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\} \\ S_h^{\mathfrak{G}_{m,n}} &:= \{((i, j), (i, j+1)) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es keinen $FO[\sigma]$ -Satz φ gibt, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$\mathfrak{G}_{m,n} \models \varphi \iff m = n.$$

Aufgabe 4:

5 Punkte

Zeigen Sie, dass keine der folgenden Klassen von Graphen FO -axiomatisierbar ist:

- (a) AZYKLISCH := $\{ G : G \text{ ist ein gerichteter Graph, der keinen Kreis enthält} \}$
- (b) BAUM := $\{ G : G \text{ ist ein ungerichteter, zusammenhängender, azyklischer Graph} \}$
- (c) HAMILTONSCH := $\{ G : G \text{ ist ein gerichteter Graph, der einen Hamiltonpfad hat} \}$
- (d) EULERSCH := $\{ G : G \text{ ist ein ungerichteter Graph, der einen Eulerkreis hat} \}$

Zur Erinnerung:

Ein Graph G hat einen *Hamiltonpfad*, falls es einen Pfad gibt, der jeden Knoten von G genau $1 \times$ besucht. Ein Graph G heißt *Eulersch*, falls es einen Kreis gibt, auf dem jede Kante von G genau $1 \times$ besucht wird.