Lehrstuhl Logik in der Informatik SS 04
Humboldt-Universität zu Berlin

7. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, der 4.6.2004 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, der 9.6..2004

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und L die durch den regulären Ausdruck $a \cdot (a \cdot a)^*$ definierte Sprache. Zeigen Sie, daß L nicht in FO definierbar ist, d.h. daß die Klasse $\mathcal{K}_L := \{\mathfrak{A}_w : w \in L\}$ aller Wortmodelle der Wörter in L nicht in FO definierbar ist.

Aufgabe 2: 5 Punkte

Beweisen Sie, daß jede reguläre Sprache durch einen Satz in LFP definierbar ist. (Im Sinne der Aufgabe 1).
Hinweis: Jede reguläre Sprache ist durch einen deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ entscheidbar, wobei Q die Menge der Zustände, Σ das Alphabet und $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion ist.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Sei $\varphi := [\mathbf{lfp}_{R,\overline{x}}\, \psi](\overline{t})$ eine Formel in LFP, wobei $\psi \in$ FO. Zeigen Sie, daß es zu jeder Induktionsstufe R^i der Induktion über ψ eine Formel $\chi_i(\overline{x})$ in FO gibt, so daß für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $\overline{a} \in A^k$ gilt: $\overline{a} \in R^i$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \chi_i[\overline{a}]$.

Aufgabe 4: 6 Punkte

Graph $\mathcal{G}$: Graph $\mathcal{H}$:

(i) Finden Sie $b_1, b_2 \in \mathcal{H}$, so daß $a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2 \in$Part$(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

(ii) Was ist das größte m, so daß es $b_1, b_2 \in \mathcal{H}$ gibt mit $(\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$? Belegen Sie Ihre Aussage, indem Sie für ihr m Elemente $b_1, b_2 \in \mathcal{H}$ und ein Hin- und Her-System $(I_j)_{j \leq m} : (\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$ angeben.

(iii) Erklären Sie, warum ein größeres als das von Ihnen angegebene m nicht möglich ist, indem Sie eine entsprechende Gewinnstrategie für Spieler I angeben.