Lehrstuhl Logik in der Informatik SS 04
Humboldt-Universität zu Berlin

6. Übung Logik und Komplexität
Abgabe: Freitag, der 28.5..2004 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, der 2.6.2004

Aufgabe 1: 5 Punkte

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Jede endliche Struktur ist bis auf Isomorphie in der Logik erster Stufe definierbar, d.h. für jede endliche Struktur $\mathfrak{A}$ gibt es einen Satz φ, so daß für alle endlicher Strukturen $\mathfrak{B}$ gilt:

$$\mathfrak{B} \models \varphi \qquad \text{gdw.} \qquad \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

(ii) Jede unter Isomorphie abgeschlossene Klasse $\mathcal{K}$ endlicher Strukturen ist durch eine Menge von FO-Formeln definierbar, d.h. zu $\mathcal{K}$ gibt es eine Formelmenge Φ, so daß

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathcal{K}.$$

Bemerkung: Beide Aussagen sind falsch, wenn auch unendliche Strukturen zugelassen werden.

Aufgabe 2: 5 Punkte

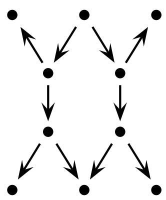
Zeigen Sie:

(i) Die Struktur $(\mathbb{Z}, <, +)$ ist in $(\mathbb{N}, <, +, \cdot)$ FO-interpretierbar.

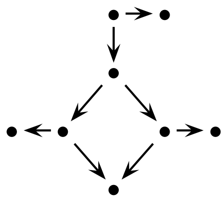
(ii) Die Struktur $(\mathbb{N}, <, +)$ ist in $(\mathbb{N}, <)$ IFP-interpretierbar.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Struktur $\mathfrak{A}$:



Struktur $\mathfrak{B}$:



(i) Welches ist das kleinste m, so daß Spieler I das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

(ii) Finden Sie einen Satz ψ mit Quantorenrang m, so daß $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$, wobei hier m das m aus Teil (i) sein soll.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Für $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei $\mathfrak{A}_{m,n} := (A, P, Q)$ eine Struktur mit Universum $A := P \cup Q$ und einstelligen Prädikaten der Größe $|P| = m$ und $|Q| = n$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A}_{m_0,n_0} \equiv_k \mathfrak{A}_{m_1,n_1}$ genau dann gilt, wenn

$$(m_0 = m_1 \text{ oder } m_0, m_1 \geq k) \quad \text{und} \quad (n_0 = n_1 \text{ oder } n_0, n_1 \geq k).$$