Lehrstuhl Logik in der Informatik SS 04
Humboldt-Universität zu Berlin

5. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, der 24.5.2004 zu Beginn der Vorlesung

Übungstermin: Mittwoch, der 26.5.2004

Aufgabe 1: 5 Punkte

Zeigen Sie ohne Rückgriff auf komplexitätstheoretische Sachverhalte, daß auf geordneten endlichen Strukturen jede Formel aus SO äquivalent ist zu einer Formel in PFP.
Hinweis: Benutzen Sie das Beispiel für eine PFP-Formel aus der Vorlesung. Weiterhin: Beachten Sie, daß PFP unter Negation abgeschlossen ist und sich jeder Quantor $\forall X \varphi$ durch Negation in einen Existenzquantor umschreiben läßt.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Zeigen Sie, daß die Logik PFP die Komplexitätsklasse PSPACE auf der Klasse der endlichen geordneten Strukturen beschreibt. (D.h. beweisen Sie Satz 2.25 der Vorlesung.)
Hinweis: Der Beweis verläuft ähnlich zum Satz von Immerman und Vardi, nur daß hier eine Induktionsstufe genau eine Konfiguration speichert. Beachten Sie, daß eine Konfiguration einer polynomial platzbeschränkten TM nur polynomiale Größe hat. Sie können im Beweis abkürzende Schreibweisen wie "$\overline{x} = \overline{x}' + 1$" und ähnliches verwenden.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wir betrachten endliche Transitionssysteme $\mathcal{K} := (V, E, P)$, d.h. (V, E) ist ein Graph und $P^{\mathcal{K}}$ ist eine einstellige Relation. Formalisieren Sie folgende Sachverhalte in der Logik TC:

(i) Es gibt einen Zyklus.

(ii) Die Relation E ist fundiert, d.h. es gibt keine unendliche Folge $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(iii) Es gibt einen unendlichen Pfad vom Knoten x aus, auf dem unendlich oft ein Knoten aus P gesehen wird.

Bemerkung: Für diese Aufgabe ist es wesentlich, daß die Graphen endlich sind. Für unendliche Strukturen sind die Eigenschaften *(ii)* und *(iii)* nicht TC-definierbar.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Betrachten Sie die Formel $\varphi(R, x) := \forall y\, (Exy \to Ry)$ über der Signatur $\{E\}$ der Graphen.

(i) Ist F_φ monoton? (Für jeden Graph $G := (V, E)$ ist F_φ die in der Vorlesung definierte Abbildung $F_\varphi : V \to V$.)

(ii) Beschreiben Sie allgemein die durch φ induzierten Induktionsstufen, d.h. geben Sie ein allgemeines Kriterium für Knoten v eines Graphen an, in der Induktionsstufe R^i enthalten zu sein.

(iii) Geben Sie einen Graphen $\mathcal{G}$ an, für den $R^n = \emptyset$ für alle n sowie einen Graphen $\mathcal{G}'$, für den R^∞ alle Knoten enthält.