Lehrstuhl Logik in der Informatik SS 04
Humboldt-Universität zu Berlin

4. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 14.5.2004 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 19.5.2004 in der Übungsgruppe

Aufgabe 1: 3 Punkte

Sei A eine Menge und $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ eine Abbildung. In der Vorlesung wurde definiert, wann eine solche Abbildung *monoton*, *inflationär* oder *induktiv* ist.
Geben Sie eine Menge A und für jeden der Begriffe *monoton* und *inflationär* eine Abbildung $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ an, die die eine aber nicht die andere Eigenschaft hat. Geben Sie ferner eine Abbildung an, die weder *monoton* noch *inflationär* noch *induktiv* ist.

Aufgabe 2: 7 Punkte

Sei A eine endliche Menge und $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ eine monotone Abbildung. Analog zur Definition kleinster Fixpunkte können auch größte Fixpunkte betrachtet werden. Eine Menge P heißt *größter Fixpunkt* von F (geschrieben $\mathbf{gfp}(F)$), falls P ein Fixpunkt von F ist und für alle Fixpunkte Q von F gilt $Q \subseteq P$. Zeigen Sie den Satz von Knaster und Tarski für größte Fixpunkte, d.h. zeigen Sie

$$\mathbf{gfp}(F) = \bigcup\{X : X \subseteq F(X)\} = \bigcup\{X : F(X) = X\}.$$

Betrachten Sie folgende Sequenz von Mengen: $R^0 := A$ und für $i > 0$, $R^{i+1} := F(R^i)$.
Analog zu dem in der Vorlesung behandelten Fall kleinster Fixpunkte wird auch diese Sequenz stationär, d.h. es gibt ein i, so daß $R^i = R^{i+1} =: R^\infty$. Zeigen Sie, daß $\mathbf{gfp}(F) = R^\infty$.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Beweisen Sie folgende Dualität zwischen kleinsten und größten Fixpunkten.
Zu jeder monotonen Abbildung $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ definieren wir die *duale* Abbildung $F^d : X \mapsto \overline{F(\overline{X})}$, wobei $\overline{X}$ das Komplement von X bezeichnet. Für alle monotonen Abbildungen $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ gilt:

$$\mathbf{lfp}(F) := \overline{\mathbf{gfp}(F^d)} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{gfp}(F) := \overline{\mathbf{lfp}(F^d)}$$

Aufgabe 4: 4 Punkte

In der Vorlesung wurden Induktionsstufen ausschließlich für Abbildungen über *endlichen* Mengen definiert. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, daß diese Definition für unendliche Mengen nicht ausreicht.
Geben Sie dafür eine unendliche Menge A und eine monotone Abbildung $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ an, so daß der kleinste Fixpunkt der Abbildung nicht als Fixpunkt der Sequenz der Induktionsstufen erreicht wird, d.h. es gibt kein $i \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbf{lfp}(F) = F^i(\emptyset)$.