Lehrstuhl Logik in der Informatik SS 04
Humboldt-Universität zu Berlin

3. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 7.5.2004 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 12.5.2004 in der Übungsgruppe

Aufgabe 1: 5 Punkte

Sei σ eine Signatur und $R \notin \sigma$ ein k-stelliges Relationssymbol. Eine Formel $\varphi(R, \overline{x}) \in \text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$, die neben den Symbolen aus σ auch das Relationssymbol R benutzen darf, heißt *monoton in* R (im Endlichen), wenn für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A} := (A, \sigma)$ und alle Relationen $P, Q \subseteq A^k$ gilt:

$$P \subseteq Q \implies \varphi(P) \subseteq \varphi(Q),$$

wobei $\varphi(Q) := \{\overline{a} \in A^k : (\mathfrak{A}, Q) \models \varphi[\overline{a}]\}$ und analog für P und $\varphi(P)$.
Beweisen Sie, daß Monotonie für FO-Formeln $\varphi(R, \overline{x})$ unentscheidbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trakhtenbrot ähnlich zum Beweis des Satzes 1.42.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Ein ungerichteter Graph $\mathcal{G} := (V, E)$ heißt *k-färbbar*, für $k \in \mathbb{N}$, falls die Knoten des Graphen so mit Farben $C_1, \ldots, C_k$ gefärbt werden können, daß jeder Knoten genau eine Farbe und je zwei benachbarte Knoten verschiedene Farben erhalten.
Der Graph heißt *zusammenhängend*, falls es zu je zwei Knoten $u, v \in V$ ein Pfad zwischen u und v gibt.

(a) Geben Sie einen Satz $\varphi_{\text{zsg}} \in \text{SO}$ an, der genau dann in einem Graph $\mathcal{G}$ gilt, wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.

(b) Geben Sie einen MSO-Satz φ_3 an, so daß ein Graph $\mathcal{G} \models \varphi_3$ genau dann, wenn $\mathcal{G}$ 3-färbbar ist.

(c) Geben Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ einen MSO-Satz φ_k an, der genau dann in einem Graph $\mathcal{G}$ gilt, wenn dieser k-färbbar ist.

(d) Geben Sie einen SO-Satz φ_f an, so daß für alle ungerichteten Graphen $\mathcal{G} := (V, E)$ gilt: $\mathcal{G} \models \varphi_f$ genau dann, wenn $\mathcal{G}$ k-färbbar ist für ein $k < |V|$. $\mathcal{G}$ kann also mit weniger Farben gefärbt werden, als es Knoten gibt.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Geben Sie eine formale Definition der Semantik der Logik zweiter Stufe. Dabei können Sie sich auf Signaturen beschränken, die keine Funktionssymbole, wohl aber Relations- und Konstantensymbole enthalten.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Sei σ eine Signatur und $\leq \notin \sigma$ ein 2-stelliges Relationssymbol. Sei $\mathfrak{A} := (A, \sigma)$ eine Struktur und $\leq$ eine lineare Ordnung auf A. Sei ferner $<_{\text{lex}}$ die durch $\leq$ induzierte lexikographische Ordnung auf A^k. Wir bezeichnen mit $enc_{\leq}(\mathfrak{A})$ die Standardkodierung von $\mathfrak{A}$ unter Verwendung der Ordnung $\leq$. Sei $enc_{\leq}(\mathfrak{A}) := w_0 \ldots w_n$. Im Beweis des Satzes von Fagin wurden Formeln $\beta_0(\overline{x}), \beta_1(\overline{x}) \in \text{FO}[\sigma \dot\cup \{\leq\}]$, für k-Tupel von

Variablen $\overline{x}$, mit folgender Bedeutung verwendet: Für alle $\overline{a} \in A^k$ und $i \in \{0, 1\}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \beta_i[\overline{a}] \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad w_p = i,$$

wobei $p = \mathrm{rg}_{<_{\mathrm{lex}}}(\overline{a})$ den Rang des Tupels $\overline{a}$ bzgl. $<_{\mathrm{lex}}$ bezeichnet.
Geben Sie eine präzise Definition der Formeln β_0 und β_1.

Hinweis: Benutzen Sie die Formeln aus Aufgaben 1 und 2 des zweiten Übungsblattes.