Lehrstuhl Logik in der Informatik SS 04
Humboldt-Universität zu Berlin

2. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Freitag, den 30.4.2004 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Mittwoch, den 5.5.2004 in der Übungsgruppe

Aufgabe 1: 6 Punkte

Konstruieren Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ Formeln $\varphi(x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k) \in \mathrm{FO}[\{<\}]$, welche auf endlichen linearen Ordnungen folgende Eigenschaften formalisieren:

(a) $\overline{x} <_{\text{lex}} \overline{y}$.

(b) $\overline{y}$ ist der unmittelbare Nachfolger von $\overline{x}$ bzgl. $<_{\text{lex}}$.

(c) $\overline{y}$ ist der unmittelbare Vorgänger von $\overline{x}$ bzgl. $<_{\text{lex}}$.

(d) $\overline{x}$ ist das maximale Tupel bzgl. $<_{\text{lex}}$.

(e) $\overline{x}$ ist das minimale Tupel bzgl. $<_{\text{lex}}$.

Dabei ist $<_{\text{lex}}$ die durch $<$ induzierte lexikographische Ordnung auf k-Tupeln gemäß Definition 1.33.

Aufgabe 2: 3 Punkte

Seien k, l natürliche Zahlen, so daß $1 \leq l \leq k$. Geben Sie eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}[\{<\}]$ an, so daß für alle endlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} := (A, <)$ und alle k-Tupel $\overline{a} := (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{a}] \qquad \text{gdw.} \qquad \mathrm{rg}_{\text{lex}}(\overline{a}) < n^l,$$

wobei $n := |\mathfrak{A}|$ die Anzahl der Elemente in A und $\mathrm{rg}_{\text{lex}}(\overline{a})$ den Rang der Elemente $\overline{a}$ in der lexikographischen Ordnung $<_{\text{lex}}$ gemäß Definition 1.34 bezeichnet.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Sei $\sigma := \{R_1, \dots, R_m\}$ eine relationale Signatur, wobei R_i Relationssymbole der Stelligkeit r_i seien. Sei $\mathfrak{A} := (Q, R_1, \dots, R_m)$ eine σ-Struktur und U eine Teilmenge von A. Dann ist $\mathfrak{A}_{|U} := (U, R_1 \cap U1r_1, \dots, R_m \cap U^{r_m})$ die von U induzierte Substruktur von $\mathfrak{A}$. Für jede FO-Formel ψ und jedes einstellige Relationssymbol U sei $\psi^{(U)}$ die Relativierung von ψ auf U, welche aus ψ konstruiert wird, indem rekursiv jede Teilformel $\exists x \varphi$ durch $\exists x(Ux \wedge \varphi)$ und jede Teilformel $\forall x \varphi$ durch $\forall x(Ux \to \varphi)$ ersetzt wird.
Beweisen Sie das sogenannte *Relativierungslemma*:

$$(\mathfrak{A}, U) \models \psi^{(U)} \qquad \text{gdw.} \qquad A_{|U} \models \psi.$$

Aufgabe 4: 6 Punkte

(a) Zeigen Sie: Wenn $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\Sigma_k^p = \Sigma_n^p$ für alle $n \geq k$, d.h. die polynomiale Hierarchie kollabiert auf das Level k.

(b) Beweisen Sie folgende Aussage (Satz 1.27 der Vorlesung): Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann in NP, wenn es ein Polynom $p(n)$ und eine Sprache $L_0 \in P$ gibt, so daß

$$L = \{x \ : \ \exists y(|y| \leq p(|x|)) \wedge x\#y \in L_0\}$$