

Logik und Komplexität

Blatt 1

Abgabe: 23.04.2004

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Finden Sie FO-Formeln, die die folgenden Anfragen an die in Kapitel 0 der Vorlesung benutzte Beispiel-Datenbank "Bibliothek" beschreiben:

- (a) Alle Autoren, die bei (mindestens) einer der Konferenzen LICS bzw. STOC veröffentlicht haben.
- (b) Alle Tupel aus Autor und Jahr, für die der Autor im jeweiligen Jahr einen Artikel bei der Konferenz STACS hatte, in dem er keine Koautoren hatte.

Aufgabe 2

(7 Punkte)

Sei $\sigma = \{<, P_a, P_b\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol $<$ sowie zwei 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b besteht.

Einem endlichen Wort w der Länge $n \geq 1$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ ordnen wir die folgende σ -Struktur $\mathfrak{A}_w = (A_w, <^{\mathfrak{A}_w}, P_a^{\mathfrak{A}_w}, P_b^{\mathfrak{A}_w})$ zu:

- $A_w := \{1, \dots, n\}$,
- $<^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, \dots, n\}$,
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{i \in A_w : \text{an } i\text{-ter Position steht in } w \text{ der Buchstabe } a\}$,
- $P_b^{\mathfrak{A}_w} := \{i \in A_w : \text{an } i\text{-ter Position steht in } w \text{ der Buchstabe } b\}$.

Ein FO[σ]-Satz φ beschreibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathfrak{A}_w \models \varphi$.

- (a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO[σ]-Satz φ_0 ?

$$\varphi_0 := \exists x \exists y \left(P_a(x) \wedge P_b(y) \wedge x < y \wedge \left(\forall z (z < x \vee z = x \vee y = z \vee y < z) \right) \right)$$

- (b) Geben Sie einen FO[σ]-Satz an, der die Sprache L_1 aller Worte beschreibt, die dem regulären Ausdruck $a(a|b)^*bb(a|b)^*$ genügen.
- (c) Können Sie auch einen FO[σ]-Satz finden, der die Sprache aller Worte beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist?
Falls ja, geben Sie den Satz an; falls nein, versuchen Sie zu erklären, warum es keinen solchen Satz zu geben scheint.

Aufgabe 3

(8 Punkte)

Beweisen Sie Satz 1.15 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede monoton wachsende Funktion $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gilt: $\text{NTIME}(T) \subseteq \text{DTIME}(2^{\mathcal{O}(T)})$.

Aufgabe 4

Lesen Sie sich die Anfänge der Kapitel 1, 2 und 3 des Skriptes *Komplexitätstheorie* zur Vorlesung von Prof. Dr. Grädel an der RWTH Aachen durch, um nochmals die für diese Vorlesung benötigten Grundbegriffe aus der Komplexitätstheorie zu wiederholen. Das Skript ist unter der URL <http://www-mgi.informatik.rwth-aachen.de/Teaching/KT-WS01/index.html> im Web verfügbar. Sie können selbstverständlich auch jedes andere Komplexitätstheoriebuch benutzen.