

9. Übung Logiken, Spiele und Automaten

Abgabe: Dienstag, 29.6.2004 zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1:

4 Punkte

Geben Sie L_μ -Formeln an, die in einem Transitionssystem \mathcal{S} und Zustand s genau dann gelten, wenn

- (i) von s aus ein Zustand erreicht werden kann, an dem P gilt.
- (ii) auf allen Pfaden von s aus immer wieder ein Zustand aus P vorkommt.
- (iii) auf allen Pfaden gilt: immer wenn ein Zustand in P ist, gibt es von diesem Zustand aus einen Pfad zu einem Zustand aus Q .
- (iv) alle von s ausgehenden Pfade nach endlich vielen Schritten ein Zustand in P erreichen.

Aufgabe 2:

6 Punkte

- (a) Gegeben sei ein Spiel (\mathcal{A}, v_0, W) mit Arena \mathcal{A} und Gewinnbedingung W , wobei W genau die unendlichen Pfade enthält, die unendlich oft einen Zustand aus P enthalten. Geben Sie Formeln $\varphi_E, \varphi_A \in L_\mu$ an, die an einem Zustand s der Arena genau dann gelten, wenn Eva bzw. Adam von s aus das Spiel gewinnen.

Hinweis: Eine Arena $\mathcal{A} := (V_A, V_E, E)$ wird wie folgt als $\{P_E, P_A, P_{\text{Stop}}\}$ -Transitionssystem $\mathcal{S}_\mathcal{A} := (V, E, P_A, P_E, P_{\text{Stop}})$ aufgefaßt: Die Zustandsmenge $V := V_A \dot{\cup} V_E \dot{\cup} \{v_{\text{Stop}}\}$ ist die Menge aller Spielpositionen erweitert um einen neuen Zustand v_{Stop} , der einzige Zustand mit der Eigenschaft P_{Stop} . Die Eigenschaften V_E, V_A enthalten die Positionen des jeweiligen Spielers. Die Kanten des Transitionssystems sind alle Kanten des Spiels sowie von jedem Endzustand des Spiels eine Kante zum Zustand v_{Stop} und von v_{Stop} eine Kante zu sich selbst.

- (b) Wir betrachten azyklische $\{P_\vee, P_\wedge, P_\neg, P_0, P_1\}$ -Transitionssysteme \mathcal{S} , in denen jeder Zustand in genau einer der Mengen $P_\vee, P_\wedge, P_\neg, P_0, P_1$ vorkommt und in denen alle Zustände aus P_0, P_1 als einzigen Nachfolger sich selbst haben. Solche Transitionssysteme können als Kodierung eines Schaltkreises angesehen werden, bei denen die Zustände in P_1, P_0 den Eingangsgattern mit Wert 1 bzw. 0 und die Zustände in P_\vee, P_\wedge, P_\neg den ODER, UND und NICHT Gattern entsprechen. Geben Sie eine Formel $\varphi \in L_\mu$ an, die genau dann an einem Zustand $s \in \mathcal{S}$ gilt, wenn der Ausgang des Gatters den Wert 1 annimmt.

Aufgabe 3:

5 Punkte

Geben Sie zu jeder der folgenden L_μ -Formeln eine intuitive Bedeutung (in der Art wie in Aufgabe 1):

- (i) $\varphi_1 := \nu x.(P \wedge \diamond x)$.
- (ii) $\varphi_2 := \nu x.(P \wedge \diamond \mu y.((x \wedge Q) \vee (P \wedge \diamond y)))$

Aufgabe 4:

5 Punkte

Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Auswertung von μ -Kalkül-Formeln in endlichen Transitionssystemen an und analysieren Sie seine Komplexität.