

10. Übung Logiken, Spiele und Automaten
Abgabe: Dienstag, 6.7.2004 zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1:

4 Punkte

Zeigen Sie, daß die Formel $\varphi := \mu x.P \vee \square \square x$ zu keiner LTL-Formel äquivalent ist.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 von Blatt 8.

Aufgabe 2:

5 Punkte

Ein *Paritätsautomat* ist ein Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, r)$, wobei Q, Σ, q_0, Δ wie bei Büchautomaten und $r : Q \rightarrow \mathbb{N}$. Läufe eines Paritätsautomaten sind wie Läufe eines Büchautomaten definiert, und ein Lauf $\vec{q} \in Q^\omega$ ist akzeptierend, wenn

$$\max\{r(q) \mid q \in \text{Inf}(\vec{q})\}$$

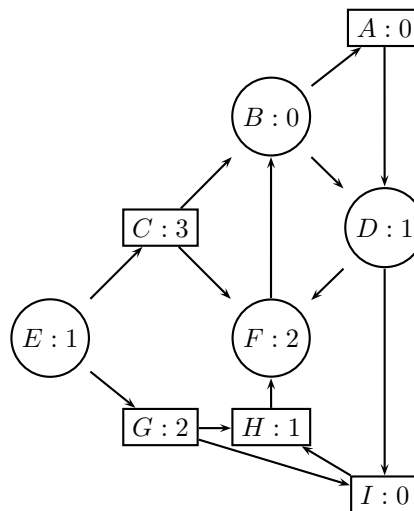
gerade ist.

Zeigen Sie, daß jede durch einen Paritätsautomaten erkennbare Sprache bereits Büchi-erkennbar ist.

Aufgabe 3:

5 Punkte

Bestimmen Sie die Gewinnpositionen für Adam und Eva in folgendem Paritätsspiel:



(Die Beschriftung $X : i$ einer Position bedeutet, dass X die Bezeichnung der Position ist und i ihr Rang.)

Aufgabe 4:

6 Punkte

Sei M eine Menge und seien $F_1, \dots, F_k : \wp(M)^k \rightarrow \wp(M)$ monotone Funktionen. (D.h., für $X_1, Y_1, \dots, X_k, Y_k \subseteq M$ gilt: Wenn $X_i \subseteq Y_i$ für $1 \leq i \leq k$, so auch $F_i(X_1, \dots, X_k) \subseteq F_i(Y_1, \dots, Y_k)$ für $1 \leq i \leq k$.) Betrachten Sie die Funktion

$$F : \wp(M)^k \rightarrow \wp(M)^k \\ (X_1, \dots, X_k) \rightarrow (F_1(X_1, \dots, X_k), \dots, F_k(X_1, \dots, X_k))$$

Offenbar ist auch F monoton.

- (a) Zeigen Sie: F hat einen kleinsten Fixpunkt $\mu(F_1, \dots, F_k) := (X_1, \dots, X_k)$. (D.h., $F(X_1, \dots, X_k) = (X_1, \dots, X_k)$ und für alle $Y_1, \dots, Y_k \subseteq M$ mit $F(Y_1, \dots, Y_k) = (Y_1, \dots, Y_k)$ gilt $X_i \subseteq Y_i$ für $1 \leq i \leq k$.) Wir bezeichnen $\mu(F_1, \dots, F_k)$ als den simultanen kleinsten Fixpunkt von F_1, \dots, F_k .

Geben Sie eine Charakterisierung von $\mu(F_1, \dots, F_k)$, die der Charakterisierung von Fixpunkten einstelliger Operatoren im Satz von Knaster und Tarski (Satz 6.2) entspricht.

- (b) Betrachten Sie die folgende Erweiterung L_μ^s des modalen μ -Kalküls L_μ um simultane Fixpunkte: Seien $\varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_k)$ L_μ^s -Formeln mit $x_1, \dots, x_k \in \text{pos}(\varphi_i)$ für $1 \leq i \leq k$. Dann ist auch $\psi := \mu x_1 \dots x_k. \varphi_1, \dots, \varphi_k$ eine L_μ^s -Formel.

Für jedes Transitionssystem \mathcal{S} und $1 \leq i \leq k$ definieren wir Operatoren $F_{\varphi_i, x_1, \dots, x_k}^{\mathcal{S}} : \wp(M)^k \rightarrow \wp(M)$ durch

$$F_{\varphi_i, x_1, \dots, x_k}^{\mathcal{S}}(X_1, \dots, X_k) = \left\{ s \in S \mid \left(\mathcal{S} \frac{X_1 \dots X_k}{x_1 \dots x_k}, s \right) \models \varphi_i \right\}.$$

Sei (X_1, \dots, X_k) der simultane kleinste Fixpunkt von $F_{\varphi_1, x_1, \dots, x_k}^{\mathcal{S}}, \dots, F_{\varphi_k, x_1, \dots, x_k}^{\mathcal{S}}$. Dann gilt $(\mathcal{S}, s) \models \psi$ genau dann, wenn $s \in X_1$.

Zeigen Sie, daß jede L_μ^s -Formel zu einer L_μ -Formel äquivalent ist.