Logiken, Spiele und Automaten

Blatt 1

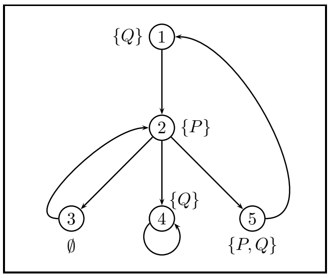
Abgabe: 27.04.2004

Aufgabe 1 (5 Punkte)

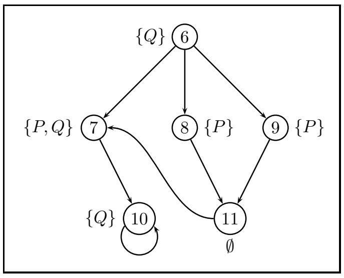
Betrachten Sie die unten abgebildeten $\{P,Q\}$-TSe $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \mathscr{S}_3$. Für $1 \leq i \leq 3$ sei $s_i \in S_i$ der in der graphischen Darstellung von $\mathscr{S}_i$ als oberstes stehende Zustand (also $s_1 = 1$, $s_2 = 6$, $s_3 = 12$).

Geben Sie für alle $i, j \leq 3$ an, ob $(\mathscr{S}_i, s_i)$ bisimilar zu $(\mathscr{S}_j, s_j)$ ist und geben Sie ggf. eine Bisimulation zwischen $(\mathscr{S}_i, s_i)$ und $(\mathscr{S}_j, s_j)$ an.

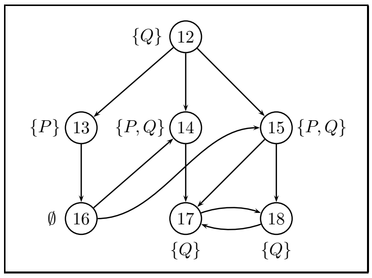
$\mathscr{S}_1$:



$\mathscr{S}_2$:



$\mathscr{S}_3$:



Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei σ eine Signatur, seien $\mathscr{S}$ und $\mathscr{T}$ zwei σ-TSe, und sei
$R \ := \ \{ \ (s,t) \in S \times T \mid (\mathscr{S}, s) \sim (\mathscr{T}, t) \ \}$. Zeigen Sie:

(a) R ist eine Bisimulation zwischen $\mathscr{S}$ und $\mathscr{T}$.

(b) Für jede Bisimulation R' zwischen $\mathscr{S}$ und $\mathscr{T}$ gilt: $R' \subseteq R$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Für einen *Baum* $\mathscr{T}$ mit Wurzelknoten r und einen Knoten v in $\mathscr{T}$ gibt die *Höhe* von v die Länge des Pfads an, der von r nach v führt. Insbesondere hat die Wurzel r die Höhe 0, und alle Nachfolger von r haben die Höhe 1.
Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge aller Knoten der Höhe i als die *i-te Ebene von $\mathscr{T}$*.

(a) Betrachten Sie das TS $\mathscr{S}_3$ aus Aufgabe 1. Geben Sie eine graphische Darstellung der *Baumabwicklung* von $(\mathscr{S}_3, s_3)$ an, die alle Zustände der Ebenen ≤ 4 enthält.

(b) Geben Sie ein endliches TS $(\mathscr{S}, s)$ an, so dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt: Die i-te Ebene der Baumabwicklung von $(\mathscr{S}, s)$ besteht aus genau $i{+}1$ Knoten.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Auf der Rückseite dieses Aufgabenblatts wird der Begriff (σ,α)-*Aktionssystem* eingeführt.

Zeigen Sie: Für jedes (σ,α)-Aktionssystem $\mathscr{S}$ gibt es ein σ'-*Transitions*system $\mathscr{S}'$ mit $S' \supseteq S$, so dass für alle $s_0 \in S$ gilt: $L(\mathscr{S}, s_0) = L(\mathscr{S}', s_0)$.

Hierbei sei σ' die disjunkte Vereinigung von σ und α, wobei Elemente aus α in σ' als *1-stellige* Relationssymbole aufgefasst werden.

Transitionssysteme mit Aktionen (kurz: Aktionssysteme)

Aktionssysteme sind eine Verallgemeinerung von *Transitionssystemen*, in der es verschiedene Arten von Transitionen, so genannte *Aktionen*, zwischen Zuständen geben kann:

(1) Eine *Aktions-Signatur* ist eine endliche Menge α von *2-stelligen* Relationssymbolen.

(2) Sei σ eine Signatur und α eine Aktions-Signatur.
Ein (σ, α)-Aktionssystem (kurz: (σ, α)-AS) ist eine Struktur

$$\mathscr{S} \;:=\; \big(\; S,\; (A^{\mathscr{S}})_{A\in\alpha},\; (P^{\mathscr{S}})_{P\in\sigma} \;\big),$$

wobei

- S eine Menge (die Zustandsmenge von $\mathscr{S}$),
- $A^{\mathscr{S}} \subseteq S \times S$, für alle $A \in \alpha$ (die *Aktionen* von $\mathscr{S}$),
- $P^{\mathscr{S}} \subseteq S$, für alle $P \in \sigma$ (die Zustandseigenschaften in $\mathscr{S}$).

Analog zur Forderung, dass *TSe deadlockfrei* sind, fordern wir von *ASen*, dass jeder Zustand mindestens einen Nachfolger bzgl. der Relation $E^{\mathscr{S}} := \bigcup_{A\in\alpha} A^{\mathscr{S}}$ hat.

(3) Ein *Berechnungspfad* (kurz: BP) eines (σ, α)-ASs $\mathscr{S}$ ist ein ω-Wort $\overset{\omega}{p} \in (S \cup \alpha)^{\omega}$, für das gilt:

(a) $p_i \in S$, für alle *geraden* $i \in \mathbb{N}$ (p_0 heißt *Anfangszustand* von $\overset{\omega}{p}$),
(b) $p_i \in \alpha$, für alle *ungeraden* $i \in \mathbb{N}$,
(c) $(p_i, p_{i+2}) \in {p_{i+1}}^{\mathscr{S}}$, für alle *geraden* $i \in \mathbb{N}$.

(4) Für $s \in S$ setze $\beta(s) := \{P \in \sigma \mid s \in P^{\mathscr{S}}\}$;
für $A \in \alpha$ setze $\beta(A) := \{A\}$;
für einen BP $\overset{\omega}{p}$ von $\mathscr{S}$ setze $\beta(\,\overset{\omega}{p}\,) := \beta(p_0)\,\beta(p_1)\,\beta(p_2)\cdots$.

(5) Für ein (σ, α)-AS $\mathscr{S}$ und einen Zustand $s_0 \in S$ definieren wir

$$L(\mathscr{S}, s_0) \;:=\; \{\; \beta(\,\overset{\omega}{p}\,) \;\mid\; \overset{\omega}{p} \text{ ist ein BP von } \mathscr{S} \text{ mit Anfangszustand } s_0 \;\}.$$

$L(\mathscr{S}, s_0)$ heißt *Sprache* von $(\mathscr{S}, s_0)$.