

12. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik  
Wiederholungsaufgaben zur freiwilligen Bearbeitung

**Aufgabe 1:**

Zeigen Sie:  
Auf Graphklassen mit beschränkter Baumweite lässt sich das MAX-INDEPENDENT-SET-Problem in Polynomialzeit lösen.

**Aufgabe 2:**

Geben Sie einen MSO $\{\{E\}\}$ -Satz an, dessen Modelle genau die azyklischen Graphen sind.

**Aufgabe 3:**

Seien  $H$  und  $G$  die Graphen aus Abbildung 1. Offensichtlich gilt  $H \preceq G$ .

- (1) Bestimmen Sie die Baumweite von  $G$ .
- (2) Geben Sie eine Modellabbildung  $\varphi$  von  $H$  nach  $G$  an, so dass gilt:
  - $V(G) = \bigcup_{v \in V(H)} \varphi(v)$  (die Fladen überdecken ganz  $G$ ),
  - der Subgraph  $\bigcup_{v \in V(H)} G[\varphi(v)] \subseteq G$  hat möglichst kleine Baumweite.

Benutzen Sie Definition 2.73 aus der Vorlesung.

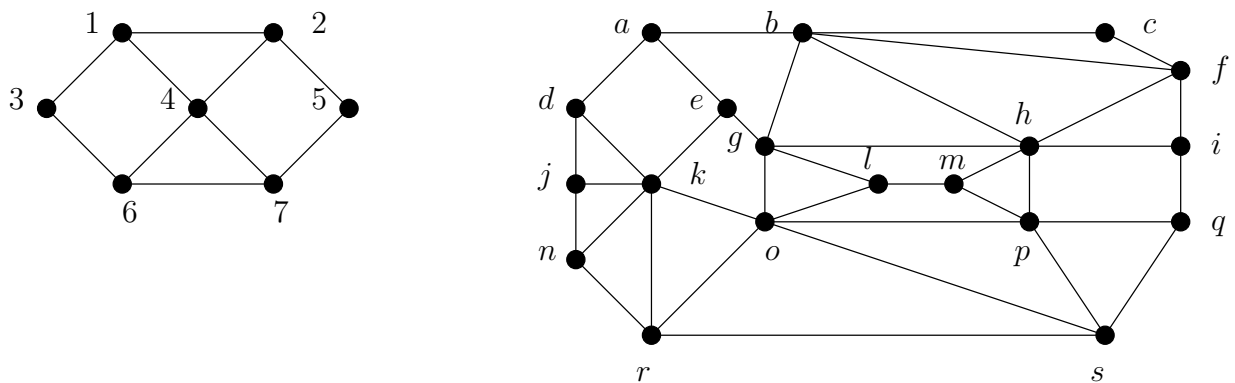


Abbildung 1: Die Graphen  $H$  und  $G$  aus Aufgabe 3.

**Aufgabe 4:**

Sei  $\mathcal{C}$  eine echte unter Minoren abgeschlossene Graphklasse, und sei  $k \in \mathbb{N}$  fest. Sei

$$\mathcal{C}^k := \{G \text{ Graph} : \text{es gibt eine Menge } X \subseteq V(G) \text{ mit } |X| \leq k \text{ und } G \setminus X \in \mathcal{C}\}.$$

Zeigen Sie: Es gibt einen Polynomialzeit-Algorithmus, der entscheidet ob ein gegebener Graph  $G$  in  $\mathcal{C}^k$  liegt.

**Aufgabe 5:**

Sei  $H = (V, E)$  ein Hypergraph und  $X \subseteq V$ . Der *von  $X$  induzierte* Hypergraph ist der Hypergraph  $H[X]$  mit  $V(H[X]) := X$  und  $E(H[X]) := \{e \cap X : e \in E\}$ .

- (1) Zeigen Sie:  $\text{cover-tw}(H[X]) \leq \text{cover-tw}(H)$ .
- (2) Geben Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen Hypergraphen  $H_n$  an mit  $\text{cover-tw}(H_n) = 1$ , der einen Subhypergraphen  $H'_n$  hat mit  $\text{cover-tw}(H'_n) = n$ .