

11. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik

Abgabe: Donnerstag, 12.7.2007 zu Beginn der Vorlesung

Übungstermin: Dienstag, der 17.7.2007

Aufgabe 1:

5 Punkte

Ein Hypergraph H heißt *azyklisch*, wenn sich seine Hyperkanten so als Knoten eines Baumes T anordnen lassen, dass für jeden Knoten $v \in V(H)$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

(*) Der Untergraph $T_v \subseteq T$, der von denjenigen Knoten erzeugt wird, die v enthalten, ist zusammenhängend.

Zeigen Sie:

- (1) Die Klasse aller azyklischen Hypergraphen hat unbeschränkte Baumweite.
- (2) Für jeden Hypergraphen H ohne isolierte Knoten gilt:

$$\text{cover-tw}(H) \leq 1 \iff H \text{ ist azyklisch.}$$

Erinnerung: Ein Knoten $v \in V(H)$ heißt *isoliert*, falls v in keiner Hyperkante von H liegt.

Aufgabe 2:

5 Punkte

Sei

$$\begin{aligned} \varphi := \exists x_{\text{id}} \exists x_{\text{name}} \exists x_{\text{yob}} \exists x_{\text{sg}} \exists x_{\text{salary}} & (R_{\text{employee_data}}(x_{\text{id}}, x_{\text{name}}, x_{\text{yob}}) \\ & \wedge R_{\text{employee_salaries}}(x_{\text{id}}, x_{\text{sg}}) \\ & \wedge R_{\text{salary_details}}(x_{\text{sg}}, x_{\text{yob}}, x_{\text{salary}}, x_{\text{salary}})). \end{aligned}$$

die Boolesche konjunktive Anfrage aus Beispiel 6.14 der Vorlesung.

- (1) Geben Sie die zugehörige Struktur \mathfrak{A}_φ an,
- (2) Geben Sie den zugrunde liegenden Hypergraphen $H_{\mathfrak{A}_\varphi}$ von \mathfrak{A}_φ an
- (3) Bestimmen Sie $\text{tw}(H_{\mathfrak{A}_\varphi})$ und $\text{cover-tw}(H_{\mathfrak{A}_\varphi})$.

Aufgabe 3:

5 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $k \leq n$. Bestimmen Sie die Cover-Baumweite der folgenden Hypergraphen:

- (1) K_n ,
- (2) $H_{\frac{n}{k}} := (\{1, \dots, n\}, [\{1, \dots, n\}]^k)$.
($H_{\frac{n}{k}}$ ist also der Hypergraph mit n Knoten und allen k -elementigen Teilmengen als Hyperkanten.)

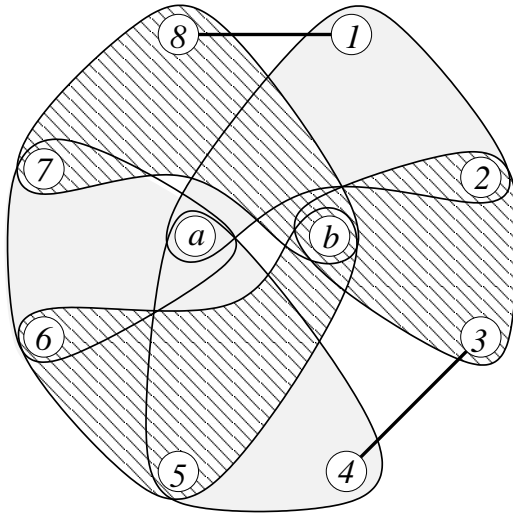


Abbildung 1: Der Hypergraph aus Aufgabe 4.

- (3) dem Hypergraphen H_n , der wie folgt definiert ist:
 H_n hat für jede Teilmenge $S \subseteq \{1, \dots, 2n\}$ der Mächtigkeit n einen Knoten v_S . Außerdem hat H_n für jedes $i \in \{1, \dots, 2n\}$ eine Hyperkante $e_i = \{v_S : i \in S\}$.

Aufgabe 4:

5 Punkte

Sei H der Hypergraph aus Abbildung 1. Also

$$H = \left(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, a, b\}, \left\{ \{1, 8\}, \{3, 4\} \right\} \cup A \cup B \right),$$

wobei $A = \{\{1, 2, a\}, \{4, 5, a\}, \{6, 7, a\}\}$, und $B = \{\{2, 3, b\}, \{5, 6, b\}, \{7, 8, b\}\}$ ist.

- (1) Geben Sie eine Baumzerlegung von H der Cover-Weite 2 an.
- (2) Geben Sie eine monotone Gewinnstrategie für 3 Gendarmen auf H an.
- (3) Gibt es auch eine monotone Gewinnstrategie für 2 Gendarmen auf H ?