

10. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik

Abgabe: Donnerstag, 05.7.2007 zu Beginn der Vorlesung

Übungstermin: Dienstag, der 10.7.2007

Aufgabe 1:

5 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ sei R_n ein n -stelliges Relationssymbol und \mathfrak{A}_n die $\{R_n\}$ -Struktur mit Universum $\{1, \dots, n\}$ und $R_n^{\mathfrak{A}_n} := \{(1, \dots, n)\}$.

Zeigen Sie: Die Klasse $\mathcal{C} := \{\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ hat *nicht* beschränkte Baumweite modulo Homomorphieäquivalenz, und $\text{HOM}(\mathcal{C})$ ist in P-TIME .

Aufgabe 2:

5 Punkte

Sei σ eine Signatur und seien \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' σ -Strukturen. Die Vereinigung von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , ist die Struktur $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ mit Universum $A \cup B$ und $R^{\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cup R^{\mathfrak{B}}$ für alle $R \in \sigma$. Die Vereinigung heißt *disjunkt*, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt. Wir schreiben $\mathfrak{A} \dot{\cup} \mathfrak{B}$ für die disjunkte Vereinigung von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} .

(1) Zeigen Sie:

Gilt $\mathfrak{A} \xrightarrow{\text{hom}} \mathcal{C}$ und $\mathfrak{B} \xrightarrow{\text{hom}} \mathcal{C}$, so gilt auch $\mathfrak{A} \dot{\cup} \mathfrak{B} \xrightarrow{\text{hom}} \mathcal{C}$.

(2) Finden Sie Graphen $G = G_1 \cup G_2$ und H , so dass gilt:

$G_1 \xrightarrow{\text{hom}} H$, $G_2 \xrightarrow{\text{hom}} H$, aber nicht $G \xrightarrow{\text{hom}} H$.

(3) Für welche Strukturen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ und \mathfrak{B} gilt die Aussage:

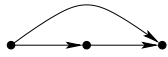

$(\mathfrak{A}_1 \xrightarrow{\text{hom}} \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{A}_2 \xrightarrow{\text{hom}} \mathfrak{B} \text{ impliziert } \mathfrak{A} \xrightarrow{\text{hom}} \mathfrak{B})$?

Aufgabe 3:

5 Punkte

Zur Erinnerung: Ein gerichteter Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$ bestehend aus einer endlichen Knotenmenge V und einer Menge von Kanten $E \subseteq V \times V$.

Zeigen Sie:

Ein gerichteter Graph G lässt sich genau dann homomorph nach  abbilden, wenn sich  nicht homomorph nach G abbilden lässt.

Aufgabe 4:

5 Punkte

1. Geben Sie einen Graphen G an, der ein Kern ist (mit Beweis). Dabei soll G weder ein vollständiger Graph sein noch ein Zykel ungerader Länge.

2. Sei \mathfrak{B} eine Struktur. Zeigen Sie:

Eine Struktur \mathfrak{A} ist genau dann Kern von \mathfrak{B} , wenn gilt:

(1) \mathfrak{A} ist isomorph zu einer Substruktur von \mathfrak{B} ,

(2) $\mathfrak{B} \xrightarrow{\text{hom}} \mathfrak{A}$, und

(3) Für jede Struktur \mathfrak{A}' mit denselben Eigenschaften (1) und (2) wie \mathfrak{A} gilt: $\mathfrak{A}' \xrightarrow{\text{hom}} \mathfrak{A}$ und \mathfrak{A} ist isomorph zu einer Substruktur von \mathfrak{A}' .