Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin
Dr. Isolde Adler, Prof. Stephan Kreutzer

SoSe 2007

9. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik

Abgabe: Donnerstag, 28.6.2007 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Dienstag, der 3.7.2007

Aufgabe 1: 5 Punkte

Hier ein Beispiel des bekannten Rätseltyps *Sudoku*. Eine Lösung des Rätsels ist eine Beschriftung der leeren Felder derart, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der fett umrandeten Blöcke jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal vorkommt.

	6	3	4		9			8
	5			2			3	
9						4		5
	7		8			9		
			3				5	
			1					7
	4	5		6				
		2				8	9	
				8				

Formulieren Sie die Frage, ob das hier abgebildete Sudoku eine Lösung hat, als Homomorphieproblem, als CSP und als Datenbankanfrage.

Aufgabe 2: 5 Punkte

(1) Sei $\mathfrak{B}$ eine Struktur. Zeigen Sie:
a) Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist genau dann Kern von $\mathfrak{B}$, wenn

(i) $\mathfrak{A}$ isomorph zu einer Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist,

(ii) $\mathfrak{B} \xrightarrow{\text{hom}} \mathfrak{A}$, und

(iii) $\mathfrak{A}$ hat keine echte Substruktur mit den Eigenschaften *(i)* und *(ii)*.

b) Ist $\mathfrak{A}$ Kern von $\mathfrak{B}$, so ist jeder Homomorphismus von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ surjektiv.

(2) Zeigen Sie, dass es NP-vollständig ist für einen gegebenen Graphen G zu entscheiden, ob K_3 Kern von G ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann 3-färbbar ist, wenn K_3 Kern von $G \,\dot{\cup}\, K_3$ ist.

Aufgabe 3: 5 Punkte

1. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m > 0$. Geben Sie die Kerne der folgenden Graphen an (mit Beweis).

(i) K_n,

(ii) $(n \times m)$-Gitter $G_{n,m}$,

(iii) Kreis mit n Knoten.

2. Sei $\sigma = \{R\}$ eine Signatur mit $ar(R) = 17$. Sei $\mathfrak{B}$ die σ-Struktur mit Universum $B = \{1, \ldots, 17\}$ und $R^{\mathfrak{B}} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{17}), (a_{17}, a_{16}, \ldots, a_1)\}$.

Geben Sie den Kern von $\mathfrak{B}$ an (mit Beweis).

Aufgabe 4: 5 Punkte

Ein Satz φ bleibt *unter Homomorphismen erhalten*, wenn für alle Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \xrightarrow{\text{hom}} \mathfrak{B}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ impliziert } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Zeigen Sie: Konjunktive Anfragen bleiben unter Homomorphismen erhalten.
Folgern Sie: Ist $\mathfrak{A}$ Kern von $\mathfrak{B}$, so gilt für alle konjunktiven Anfragen φ:

$$\mathfrak{B} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \varphi.$$