

8. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik

Abgabe: Donnerstag, 21.6.2007 zu Beginn der Vorlesung

Übungstermin: Dienstag, der 26.6.2007

Aufgabe 1:

5 Punkte

Eine *Unterteilung* eines Graphen H ist ein Graph H' , der aus H durch wiederholtes Unterteilen von Kanten entsteht. Genauer: H' entsteht aus H , indem jede Kante von H durch einen Pfad mit denselben Endpunkten ersetzt wird, wobei zwei verschiedene Pfade zwar gemeinsame Endpunkte haben können, ansonsten aber disjunkt sind.

Ein Graph H ist *topologischer Subgraph* des Graphen G , wenn G einen Subgraphen hat, der isomorph zu einer Unterteilung von H ist.

Zeigen Sie:

- (1) Ist H ein topologischer Subgraph von G , so ist $H \preceq G$.
- (2) Es gibt eine unendliche Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Graphen, mit der Eigenschaft, dass für je zwei Graphen G_n und G_m mit $n \neq m$ gilt: G_n ist kein topologischer Subgraph von G_m .

Aufgabe 2:

5 Punkte

Sei σ eine Signatur, und seien $\mathfrak{A} = (A, \sigma)$ und $\mathfrak{B} = (B, \sigma)$ zwei σ -Strukturen. Ein *Homomorphismus* von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} ist eine Abbildung $h : A \rightarrow B$, so dass für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, etwa mit $ar(R) = r$, und für alle $\bar{a} = (a_1, \dots, a_r) \in A^r$ gilt:

$$\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}} \implies h(\bar{a}) \in R^{\mathfrak{B}},$$

wobei $h(\bar{a}) := (h(a_1), \dots, h(a_r))$.

Zeigen Sie: Für festes $k \geq 0$ kann das Problem

HOM(\mathcal{T}_k)	
<i>Eingabe:</i>	σ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} mit $\text{tw}(\mathfrak{A}) \leq k$.
<i>Problem:</i>	Gibt es einen Homomorphismus $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\text{hom}} \mathfrak{B}$?

in Zeit $\mathcal{O}((\|\mathfrak{A}\| + \|\mathfrak{B}\|)^{k+1})$ gelöst werden. Hierbei ist $\|\mathfrak{A}\| := |\sigma| + |A| + \sum_{R \in \sigma} |R^{\mathfrak{A}}| \cdot ar(R)$.

Aufgabe 3:

5 Punkte

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es für das folgende Problem einen Polynomialzeit-Algorithmus gibt:

Eingabe: $G \in \mathcal{L}(\lambda, \mu)$, $U \subseteq V(G)$ mit $|U| \leq \mu$ so dass $G \setminus U \in \mathcal{L}(\lambda, 0)$, und $Y \subseteq U$.

Ausgabe: eine Teilmenge $X(Y) \subseteq V(G) \setminus U$, so dass $X(Y) \cup Y$ ein Vertex Cover von G ist mit

$$|X(Y)| \leq (1 + \varepsilon) \min \{ |X| \mid X \subseteq V(G) \setminus U, X \cup Y \text{ Vertex Cover von } G \},$$

falls so eine Menge $X(Y)$ existiert, andernfalls \perp .

Hinweis: Sie dürfen Behauptung 1 aus dem Beweis von Satz 5.16. verwenden.

Aufgabe 4:

5 Punkte

Seien I und J Graphen, sei $\mathcal{C} = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$, sei \mathcal{F} eine Klasse von Graphen, und sei $F \in \mathcal{F}$.

Zeigen Sie:

- (1) Es gibt einen Graphen $G \in \mathcal{C}$ mit $F \preceq G$

$$\iff$$

$$I \not\preceq F \text{ oder } J \not\preceq F$$

- (2) Es gibt einen Graphen $G \in \mathcal{V}(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{C}$

$$\iff$$

Es gibt einen Graphen $G' \in \mathcal{V}(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{C}$, so dass $\text{tw}(G') \leq f(I, J)$ für eine berechenbare Funktion f .

Hinweis: Sie dürfen Satz 5.21 verwenden.