Institut für Informatik SS 07
Humboldt-Universität zu Berlin
Dr. Isolde Adler, Prof. Stephan Kreutzer

6. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik
Abgabe: Donnerstag, 7.6.2007 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Dienstag, der 12.6.2007

Aufgabe 1: 5 Punkte

Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Problem

k-PLANAR-INDEPENDENT-SET	
Eingabe:	Planarer Graph G.
Problem:	Hat G ein independent set der Größe k?

in Zeit $\mathcal{O}(6^k \cdot |G|)$ lösbar ist.

Aufgabe 2: 5 Punkte

Sei $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen FO-Satz in Gaifman-Normalform an, der besagt, dass ein Graph ein dominating set der Größe k besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie den Beweis von 3.13.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Sei G ein Graph. Ein *feedback vertex set* (FVS) von G ist eine Menge $S \subseteq V(G)$, so dass jeder Kreis in G ein Element aus S enthält. (Alternativ: $G \setminus S$ ist azyklisch). Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) Hat G ein FVS der Größe k, so ist $\mathrm{tw}(G) \leqslant k+1$.

(2) Es gibt einen Algorithmus, der auf Eingabe G und $l \in \mathbb{N}$ in Zeit $f(\mathrm{tw}(G)) \cdot |G|^c$, für eine berechenbare Funktion f und $c \in \mathbb{N}$, entscheidet, ob G ein FVS der Größe l hat.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 von Blatt 5.

Aufgabe 4: 5 Punkte

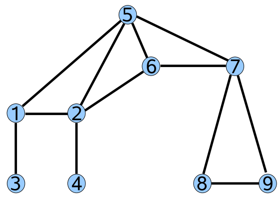
Eine *Eliminationsordnung* eines Graphs G ist eine lineare Ordnung $<$ auf $V(G)$. Seien $v_1 < \cdots < v_n$ die Knoten von G. Wir betrachten die folgende Sequenz von Graphen G_i, mit $0 \leqslant i < n$. $G_0 = (V_0, E_0) := G$ und $G_{i+1} := (V_{i+1}, E_{i+1})$ mit $V_{i+1} := V_i \setminus \{v_{i+1}\}$ und

$$E_{i+1} := \big(E_i \setminus \{\{v_{i+1}, u\} : \{v_{i+1}, u\} \in E_i\}\big) \cup \{\{u, w\} : \{v_{i+1}, u\}, \{v_{i+1}, w\} \in E_i\}.$$

G_{i+1} entsteht also aus G_i durch Löschen des Knotens v_{i+1} und aller inzidenten Kanten, wobei neue Kanten zwischen den Nachbarn von v_{i+1} eingefügt werden.

Die *Weite* von $<$ ist das Maximum der Grade von v_i in G_i.

(1) Geben Sie eine Eliminationsordnung minimaler Weite des folgenden Graphen an:



(2) Zeigen Sie: Jeder Graph der Baumweite $\leqslant k$ hat eine Eliminationsordnung der Weite $\leqslant k$.
Hinweis: Benutzen Sie Lemma 2.16 (jeder Graph mit Baumweite $\leqslant k$ hat einen Knoten vom Grad $\leqslant k$). Fügen Sie eventuell Kanten zu G hinzu.