Institut für Informatik SS 07
Humboldt-Universität zu Berlin
Dr. Isolde Adler, Prof. Stephan Kreutzer

5. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik
Abgabe: Donnerstag, 31.5.2007 zu Beginn der Vorlesung
Übungstermin: Dienstag, der 5.6.2007

Aufgabe 1: 5 Punkte

Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass folgendes Problem entscheidbar ist:

Eingabe:	Graph H.
Problem:	Gibt es einen Graph G mit $\mathrm{tw}(G) \leqslant k$ und $H \preccurlyeq G$?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Seese.

Aufgabe 2: 5 Punkte

Geben Sie analog zur Vorlesung MSO-Formeln $\varphi_i(X_1, \ldots, X_k)$ an, $i \in \{2, 3\}$, die die Bedingungen (2) bzw. (3) aus Lemma 2.61 ausdrücken.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass folgendes Problem

Eingabe:	Σ-Baum T, MSO-Formel $\varphi(X)$ mit freier Mengenvariable X, $m \in \mathbb{N}$.
Problem:	Gibt eine Menge $X \subseteq V(T)$ mit $\lvert X\rvert \leqslant m$ und $T \models \varphi(X)$?

in Zeit $f(|\varphi|) \cdot (|T|)^c$, für eine berechenbare Funktion f und eine Konstante c, lösen lässt.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Wir betrachten hier eine alternative Definition von Modellabbildungen (siehe Definition 2.73). Seien H und G Graphen. Anstatt jedem Knoten $v \in V(H)$ eine Menge $U_v \subseteq V(G)$ zuzuordnen, wird jeder Knoten $v \in V(H)$ auf einen zusammenhängenden Untergraph $G_v \subseteq G$ abgebildet.

Formal betrachten wir also Abbildungen ρ, so dass $\rho(v) \subseteq G$, $\rho(v)$ zusammenhängend in G, für alle $v \in V(H)$ und $\rho(e) \in E(G)$ für alle $e \in E(H)$, so dass die Abbildung ρ' mit

- $\rho'(v) := V(\rho(v))$, für $v \in V(H)$, und
- $\rho'(e) = \rho(e)$, für $e \in E(H)$,

eine Modellabbildung gemäß Definition 2.73 ist.

Das Bild einer solchen Abbildung ρ nennen wir ein Modell von H in G. Das Modell heißt *minimal*, wenn es kein anderes Modell von H in G gibt, mit weniger Knoten oder gleich vielen Knoten und weniger Kanten.

Zeigen Sie: Wenn das Bild einer Abbildung ρ von H in G minimal ist, so ist $\rho(v)$ ein Baum für alle $v \in V(H)$.