Institut für Informatik SS 07
Humboldt-Universität zu Berlin
Dr. Isolde Adler Prof. Stephan Kreutzer

4. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik

Abgabe: Freitag, 18.5.2007 bis 14 Uhr am Lehrstuhl
Übungstermin: Dienstag, der 22.5.2007

Aufgabe 1: 5 Punkte

(1) Sei $\Sigma := \{0, 1, \wedge, \vee, \neg\}$. Sei $\mathcal{T}$ die Klasse der Σ-Bäume, bei denen genau die Blätter mit 0 oder 1 beschriftet sind, Knoten mit der Beschriftung $\neg$ genau einen Nachfolger haben (E_1-Nachfolger) und Knoten mit Beschriftung $\wedge, \vee$ genau zwei Nachfolger haben.

Jeder aussagenlogischen Formel ohne Variablen φ können wir auf natürliche Weise einen Baum $T \in \mathcal{T}$ zuordnen (ihren Syntaxbaum). Umgekehrt entspricht jeder Baum $T \in \mathcal{T}$ einer Formel φ.

Geben Sie einen Automaten an, der genau die Bäume aus T akzeptiert, deren zugehörige Formeln wahr sind.

(2) Zeigen Sie, dass zu jedem Σ-Baumautomat $\mathcal{A}$ effektiv ein Σ-Baumautomat $\mathcal{B}$ konstruiert werden kann, mit $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}_\Sigma \setminus \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Hinweis: Wandeln Sie $\mathcal{A}$ zunächst in einen äquivalenten deterministischen Baumautomat um. Siehe dazu entsprechende Konstruktionen für Wortautomaten aus dem Grundstudium.

Aufgabe 2: 5 Punkte

Jedem Graph $G := (V, E)$ ordnen wir eine Inzidenzstruktur $G_I := (A, P_E, P_V, I)$ zu, mit $A := V \cup E$, $P_E := E$, $P_V := V$ und $I := \{(v, e) : v \in V, e \in E \text{ und } v \text{ ist inzident zu } e\}$.

- Zeigen Sie, dass für alle Graphen G gilt: $\mathrm{tw}(G) = \mathrm{tw}(G_I)$.
- Geben Sie einen $\textsc{mso}[\{P_E, P_V, I\}]$-Satz an, der über Inzidenzstrukturen sagt, dass die kodierten Graphen einen Hamiltonkreis enthalten.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Zeigen Sie, dass jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ die gleichen Baumzerlegungen hat wie ihr Gaifman-Graph.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Für einen Graphen G mit $e = \{v, w\} \in E(G)$ sei G/e der Graph, der durch *Kontraktion* (*Zusammenziehen)* der Kante e entsteht (vgl. Abbildung oben auf der nächsten Seite). Formal ist G/e gegeben durch

$V(G/e) = V(G) \setminus \{v, w\} \cup \{x_e\}$, wobei x_e ein neuer Knoten ist, und
$E(G/e) = E(G) \setminus \big\{\{u, u'\} \mid \{u, u'\} \cap e \neq \varnothing\big\} \cup \big\{\{u, x_e\} \mid \{u, v\} \in E(G) \text{ oder } \{u, w\} \in E(G)\big\}$.

G $\qquad\qquad$ G/e

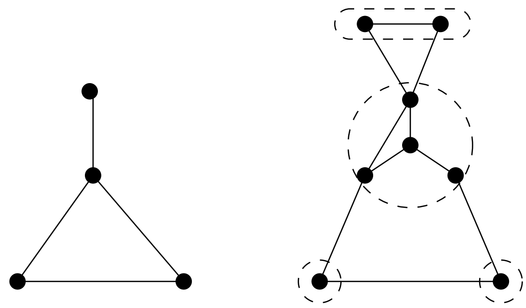
Ein Graph H ist ein *Minor* von G, in Zeichen $H \preccurlyeq G$, wenn H aus G durch eine endliche Folge von Operationen der folgenden Art entsteht:

- Knoten löschen (damit werden auch die zu den Knoten inzidenten Kanten gelöscht)
- Kanten löschen
- Kanten kontrahieren

a) Zeigen Sie: Ist $H \preccurlyeq G$, so lässt sich H aus G immer durch eine Folge obiger Operationen gewinnen, bei der die Kontraktionen zum Schluss kommen (d.h. sobald zum ersten Mal eine Kante kontrahiert wird, werden danach keine Knoten oder Kanten mehr gelöscht).

Sei $V(H) = \{v_1 \dots v_n\}$. Ein Graph M heißt *Modell von* H, falls sich $V(M)$ in n zusammenhängende, nichtleere Teilmengen $V_1, \dots, V_n$ partitionieren lässt, so dass zwischen zwei Mengen V_i und V_j $(i \neq j)$ genau dann eine Kante (in M) existiert, wenn $\{v_i, v_j\} \in E(H)$.

Die folgende Abbildung zeigt einen Graphen H und ein Modell M von H.



H $\qquad\qquad$ M

b) Zeigen Sie: $H \preccurlyeq G$ g.d.w. es einen Subgraphen $M \subseteq G$ gibt, der ein Modell von H ist.

c) Sei H ein Graph. Geben Sie einen MSO-Satz φ_H an, mit $G_I \models \varphi_H$ g.d.w. $H \preccurlyeq G$.